ਬਹੁਪਦ (Polynomials) 2

2.1 ਭੂਮਿਕਾ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦਾਂ (polynomials) ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ (degree) ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਚਲ x ਦੇ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਵਿੱਚ x ਦੀ ਵੱਡੀ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਘਾਤ (power) ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਘਾਤ (degree) ਆਖਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $4x+2$ ਦੇ x ਵਿੱਚ ਚਲ 1 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ, $2y^2-3y+4$ ਚਲ y ਵਿੱਚ ਘਾਤ 2 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ, $5x^3-4x^2+x-\sqrt{2}$ ਚਲ x ਵਿੱਚ ਘਾਤ 3 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $7u^6-\frac{3}{2}u^4+4u^2+u-8$ ਚਲ u ਵਿੱਚ ਘਾਤ 6 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ। ਵਿਅੰਜਕ $\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x}+2$, $\frac{1}{x^2+2x+3}$ ਆਦਿ ਬਹੁਪਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਘਾਤ 1 ਦੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ **(Linear polynomial)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $2x-3$, $\sqrt{3}x+5$, $y+\sqrt{2}$, $x-\frac{2}{11}$, $3z+4$, $\frac{2}{3}u+1$ ਆਦਿ ਸਾਰੇ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ $2x+5-x^2$, x^3+1 ਆਦਿ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਬਹੁਪਦ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਘਾਤ 2 ਦੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ **(quadratic polynomial)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਦੋ ਘਾਤ (quadratic) ਸ਼ਬਦ ਕਵਾਡਰੇਟ (quadrate) ਸ਼ਬਦ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਵਰਗ। $2x^2+3x-\frac{2}{5}$, y^2-2, $2-x^2+\sqrt{3}x$, $\frac{u}{3}-2u^2+5$, $\sqrt{5}v^2-\frac{2}{3}v$, $4z^2+\frac{1}{7}$, ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ (ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ)। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, x ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ax^2+bx+c, ਜਿੱਥੇ a,b,c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a \neq 0$ ਹੈ, ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਘਾਤ 3 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ **(cubic polynomial)** ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ :

$2 - x^3, x^3, \sqrt{2}x^3, 3 - x^2 + x^3, 3x^3 - 2x^2 + x - 1$

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਹੈ :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

ਜਿੱਥੇ a, b, c, d ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a \neq 0$ ਹੈ।

ਹੁਣ ਬਹੁਪਦ $p(x) = x^2 - 3x - 4$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਬਹੁਪਦ ਵਿੱਚ $x = 2$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $p(2) = 2^2 - 3 \times 2 - 4 = -6$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। $x^2 - 3x - 4$ ਵਿੱਚ, x ਨੂੰ 2 ਰੱਖਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮੁੱਲ -6; $x^2 - 3x - 4$ ਦਾ $x = 2$ ਤੇ ਮੁੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $p(0)$, $p(x)$ ਦਾ $x = 0$ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਹੈ, ਜੋ -4 ਹੈ।

ਜੇਕਰ $p(x)$, x ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਅਤੇ k ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ $p(x)$ ਵਿੱਚ x ਨੂੰ k ਰੱਖਣ ਤੇ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ **$p(x)$ ਦਾ $x = k$ 'ਤੇ ਮੁੱਲ** ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $p(k)$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

$p(x) = x^2 - 3x - 4$ ਦਾ $x = -1$ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ? ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$p(-1) = (-1)^2 - \{3 \times (-1)\} - 4 = 0$

ਨਾਲ ਹੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $p(4) = 4^2 - (3 \times 4) - 4 = 0$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $p(-1) = 0$ ਅਤੇ $p(4) = 0$, ਇਸ ਲਈ -1 ਅਤੇ 4 ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^2 - 3x - 4$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ (zeroes) ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ k ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ $p(k) = 0$ ਹੋਵੇ।

ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ $p(x) = 2x + 3$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ k ਹੈ, ਤਾਂ $p(k) = 0$ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $2k + 3 = 0$ ਭਾਵ $k = -\frac{3}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ $p(x) = ax + b$ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ k ਹੈ ਤਾਂ $p(k) = ak + b = 0$ ਭਾਵ $k = \frac{-b}{a}$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ $\frac{-b}{a} = \frac{-(\text{ਅਚਲ ਪਦ})}{x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਉਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ ਹੋਰ ਬਹੁਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਵੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ? ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਕੀ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਵੀ ਉਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ?

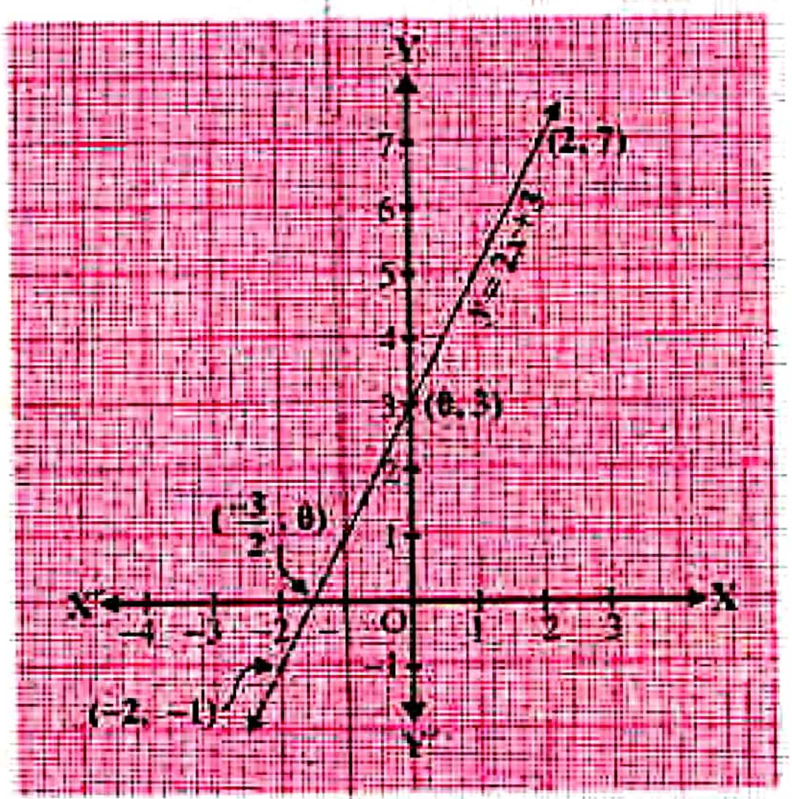
ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੰਡ ਵਿਧੀ (division algorithm) ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

2.2 ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਸਿਫਰਾਂ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ (Geometrical Meaning of the Zeroes of a Polynomial)

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ k ਬਹੁਪਦਾਂ $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਜੇਕਰ $p(k) = 0$ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਇੰਨੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਕਿਉਂ ਹਨ? ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਰੇਖੀ ਅਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਆਲੇਖੀ **(graphical)** ਨਿਰੂਪਣ ਦੇਖਾਂਗੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਸਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ ਦੇਖਾਂਗੇ।

ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b, \neq 0$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ $y = ax + b$ ਦਾ ਆਲੇਖ (graph) ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $y = 2x + 3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਬਿੰਦੂਆਂ $(-2, -1)$ ਅਤੇ $(2, 7)$ ਤੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ।

x	-2	2
$y = 2x + 3$	-1	7



ਚਿੱਤਰ 2.1

ਚਿੱਤਰ 2.1 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $y = 2x + 3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ x-ਧੁਰੇ *(axis)* ਨੂੰ $x = -1$ ਅਤੇ $x = -2$ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਭਾਵ $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ $2x + 3$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ $-\frac{3}{2}$ ਹੈ। ਭਾਵ ਬਹੁਪਦ $2x + 3$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $y = 2x + 3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b, a \neq 0$ ਦੇ ਲਈ $y = ax + b$ ਦਾ ਗਰਾਫ਼ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜੋ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਠੀਕ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b, a \neq 0$ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਜੋ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ ਅੰਕ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $y = ax + b$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਆਉ ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ ਨੂੰ ਸਮਝੀਏ। ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^2 - 3x - 4$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਕਿਸ *ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਦਿਖਾਈ

• ਦੋ ਘਾਤੀ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਖਿੱਚਣਾ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਇਸਦਾ ਮੁਲਾਂਕਣ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

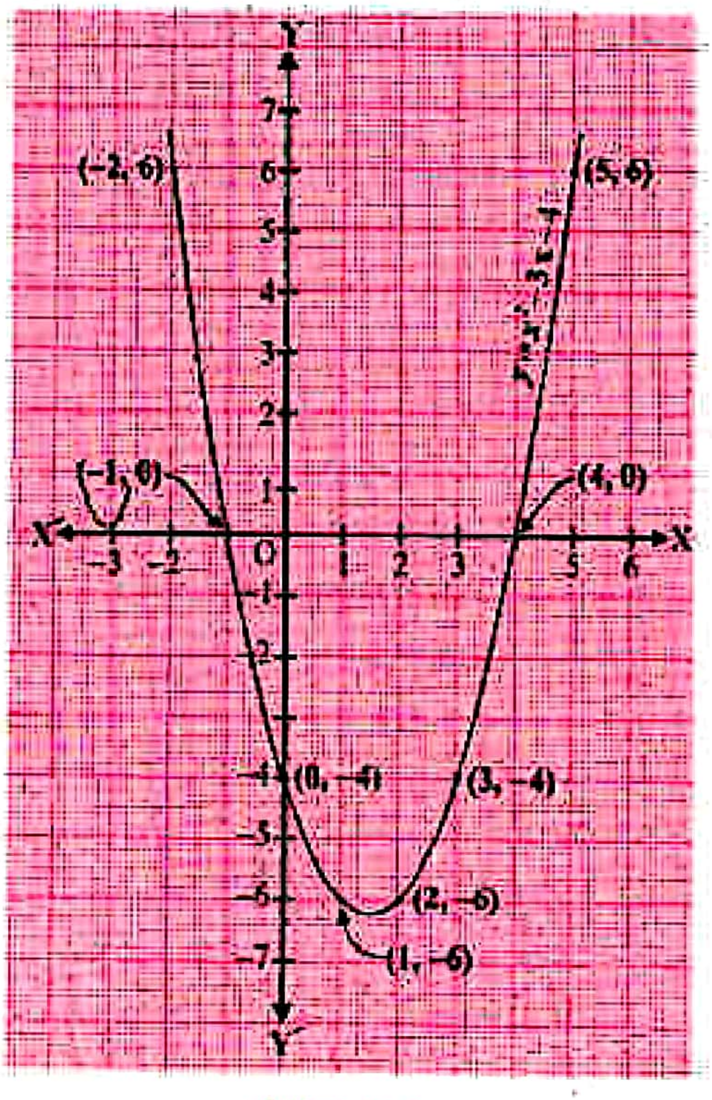
ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ x ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰਣੀ 2.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 2.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰੀਏ ਅਤੇ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਖਿੱਚੀਏ ਤਾਂ ਇਹ ਚਿੱਤਰ 2.2 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਗਏ ਵਰਗਾ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ਦੇ ਲਈ ਸੰਗਤ ਸਮੀਕਰਣ $y = ax^2 + bx + c$ ਦੇ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਦਾ ਅਕਾਰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਖੁੱਲਾ $\cup$ ਵਰਗਾ ਜਾਂ ਹੇਠਲੇ ਪਾਸੇ ਖੁੱਲਾ $\cap$ ਵਰਗਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਜੋ ਇਸ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰੇਗਾ ਕਿ $a > 0$ ਹੈ ਜਾਂ $a < 0$ ਹੈ (ਇਹਨਾਂ ਵਕਰਾਂ ਨੂੰ ਪੈਰਾਬੋਲਾ **(parabola)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ)।



ਚਿੱਤਰ 2.2

ਸਾਰਣੀ 2.1 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ -1 ਅਤੇ 4 ਹਨ। ਇਸ ਉੱਪਰ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ -1 ਅਤੇ 4 ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^2 - 3x - 4$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

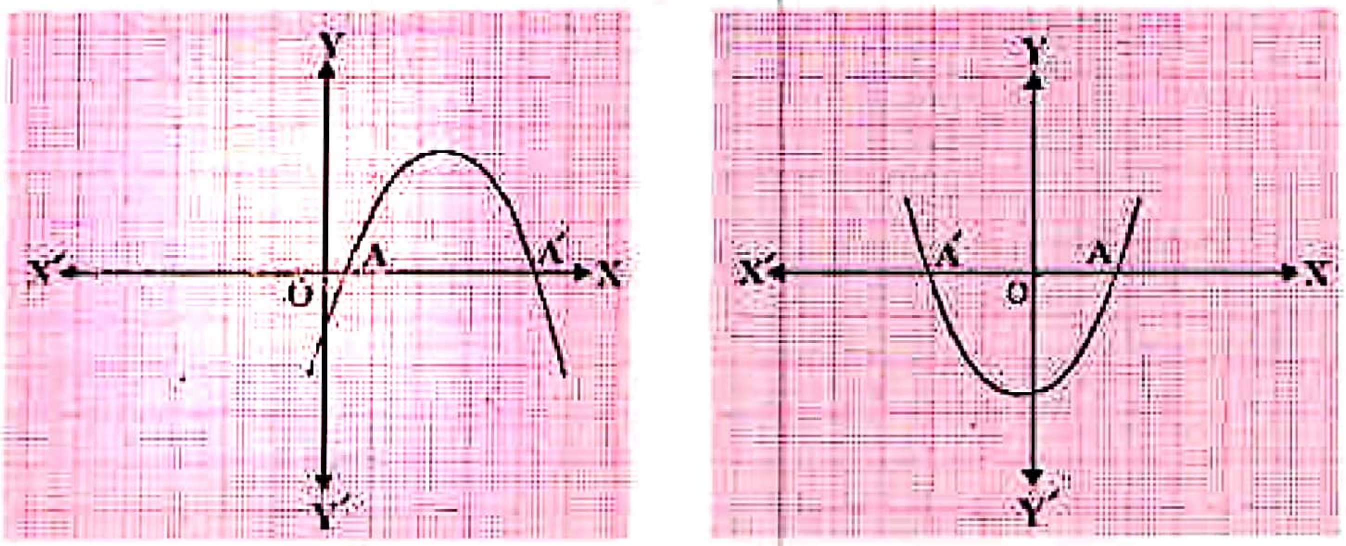
ਇਹ ਤੱਥ ਸਾਰੀਆਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x – ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y = ax^2 + bx + c$ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਪੈਰਾਬੋਲਾ (parabola) x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

$y = ax^2 + bx + c$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਦੇ ਅਕਾਰ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ 'ਤੇ ਤਿੰਨ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ

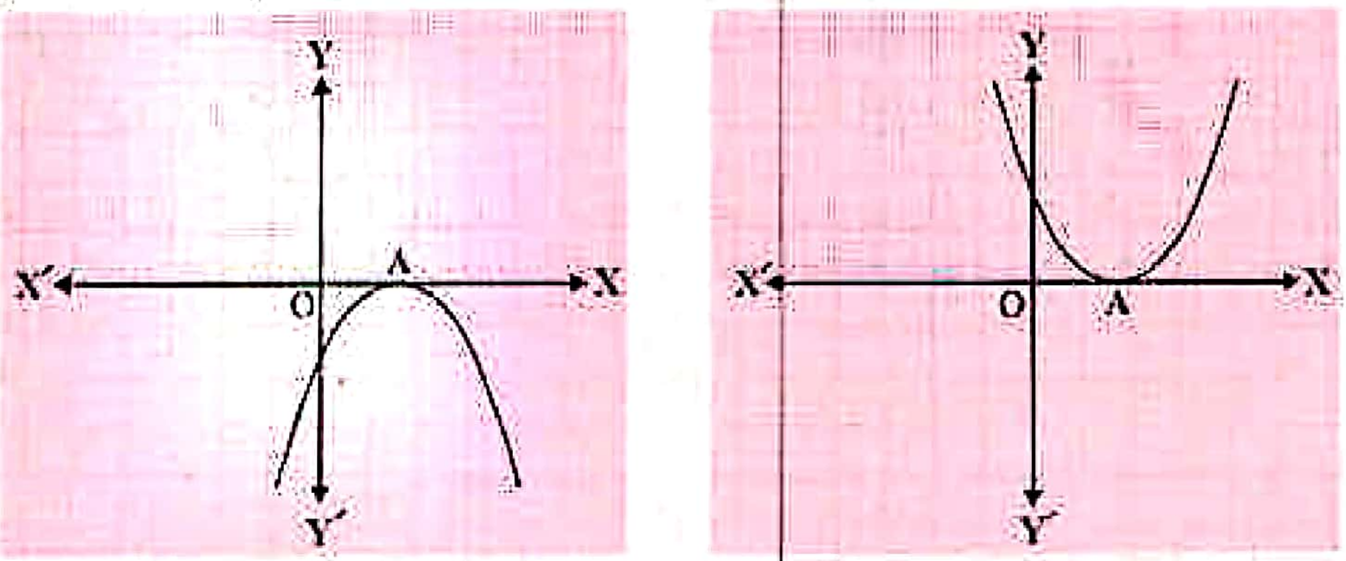
(i) : ਜਿੱਥੇ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਅੱਲਗ-ਅੱਲਗ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ A′ ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ A ਅਤੇ A′ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦੇ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.3)।



ਚਿੱਤਰ 2.3

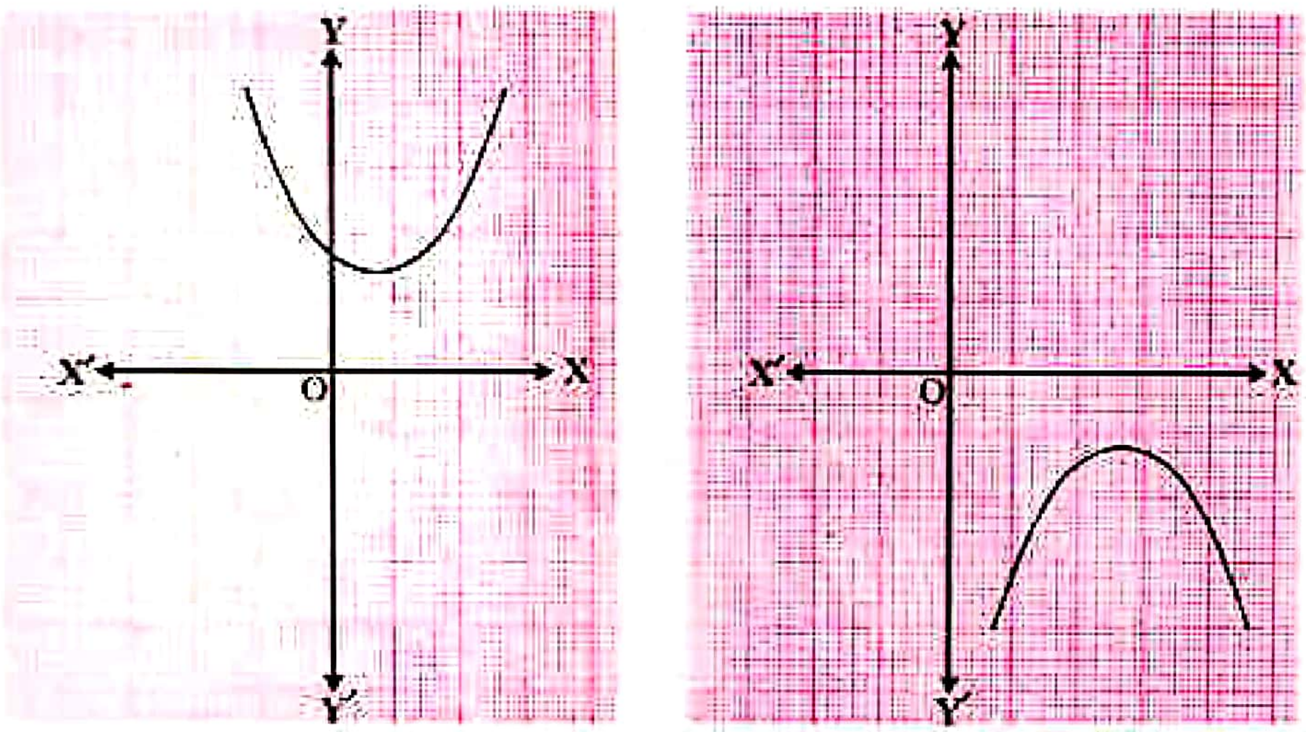
ਸਥਿਤੀ (ii) : ਇੱਥੇ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਭਾਵ ਦੋ ਸੰਪਾਤੀ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਥਿਤੀ (i) ਦੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ A′ ਇੱਥੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਕੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ A ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.4)।



ਚਿੱਤਰ 2.4

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, A ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ (iii) ਇੱਥੇ ਆਲੇਖ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ x–ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ x–ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ x–ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕਿਤੇ ਵੀ ਨਹੀਂ ਕੱਟਦਾ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.5)।



ਚਿੱਤਰ 2.5

ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦਾ ਕੋਈ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਦੋ ਅੱਲਗ-ਅੱਲਗ ਸਿਫ਼ਰ ਜਾਂ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਸਿਫ਼ਰ (ਭਾਵ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ) ਜਾਂ ਕੋਈ ਵੀ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਇਹ ਵੀ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਘਾਤ 2 ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ ਬਾਰੇ ਕੀ ਉਮੀਦ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਆਉ ਇਸਦਾ ਪਤਾ ਕਰੀਏ। ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^3 - 4x$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਇਹ ਦੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿ $y = x^3 - 4x$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ, ਆਉ x ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ y ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 2.2 ਵਿੱਚ ਸੂਚੀ ਬੱਧ ਕਰੀਏ।

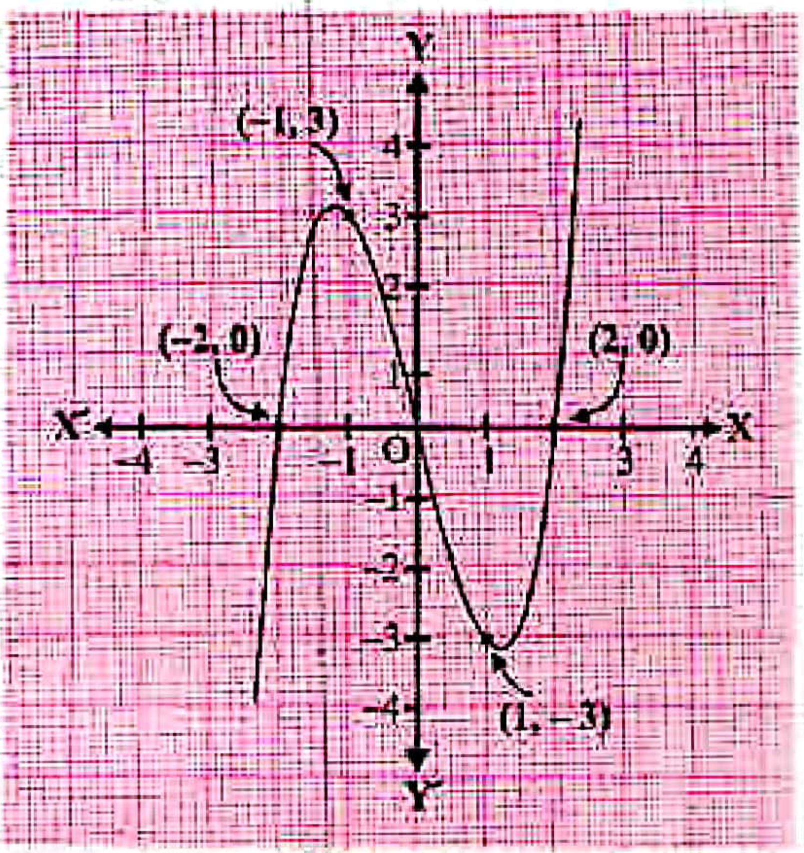
ਸਾਰਣੀ 2.2

x	–2	–1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	–3	0

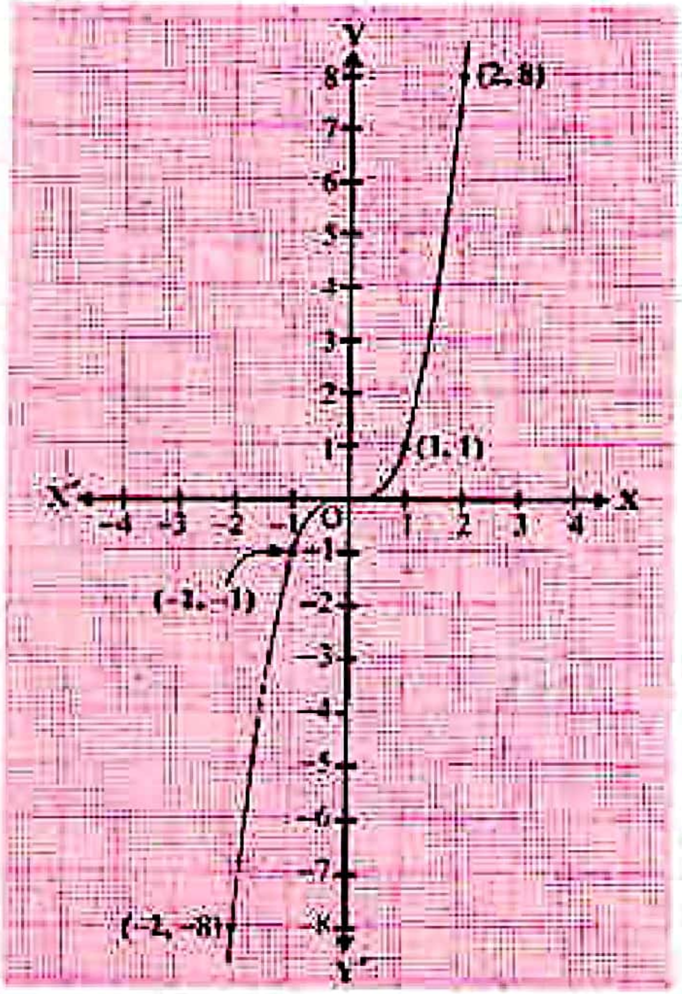
ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰਨ ਅਤੇ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਣ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $y = x^3 - 4x$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰ 2.6 ਵਰਗਾ ਦਿਖਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^3 - 4x$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ -2, 0 ਅਤੇ 2 ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ -2, 0 ਅਤੇ 2 ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x– ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y = x^3 - 4x$ ਦਾ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਵਕਰ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇਹਨਾਂ ਹੀ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਕਟਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਕੇਵਲ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ।

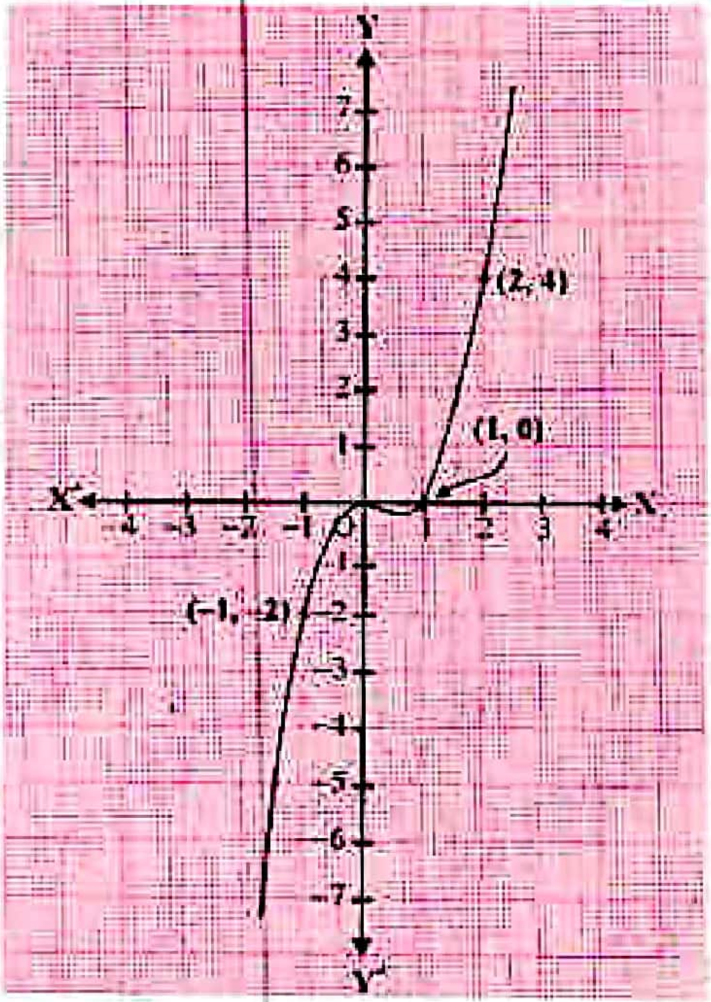
ਆਉ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ x^3 ਅਤੇ $x^3 - x^2$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ $y = x^3$ ਅਤੇ $y = x^3 - x^2$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਚਿੱਤਰ 2.7 ਅਤੇ 2.8 ਵਿੱਚ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 2.6



ਚਿੱਤਰ 2.7



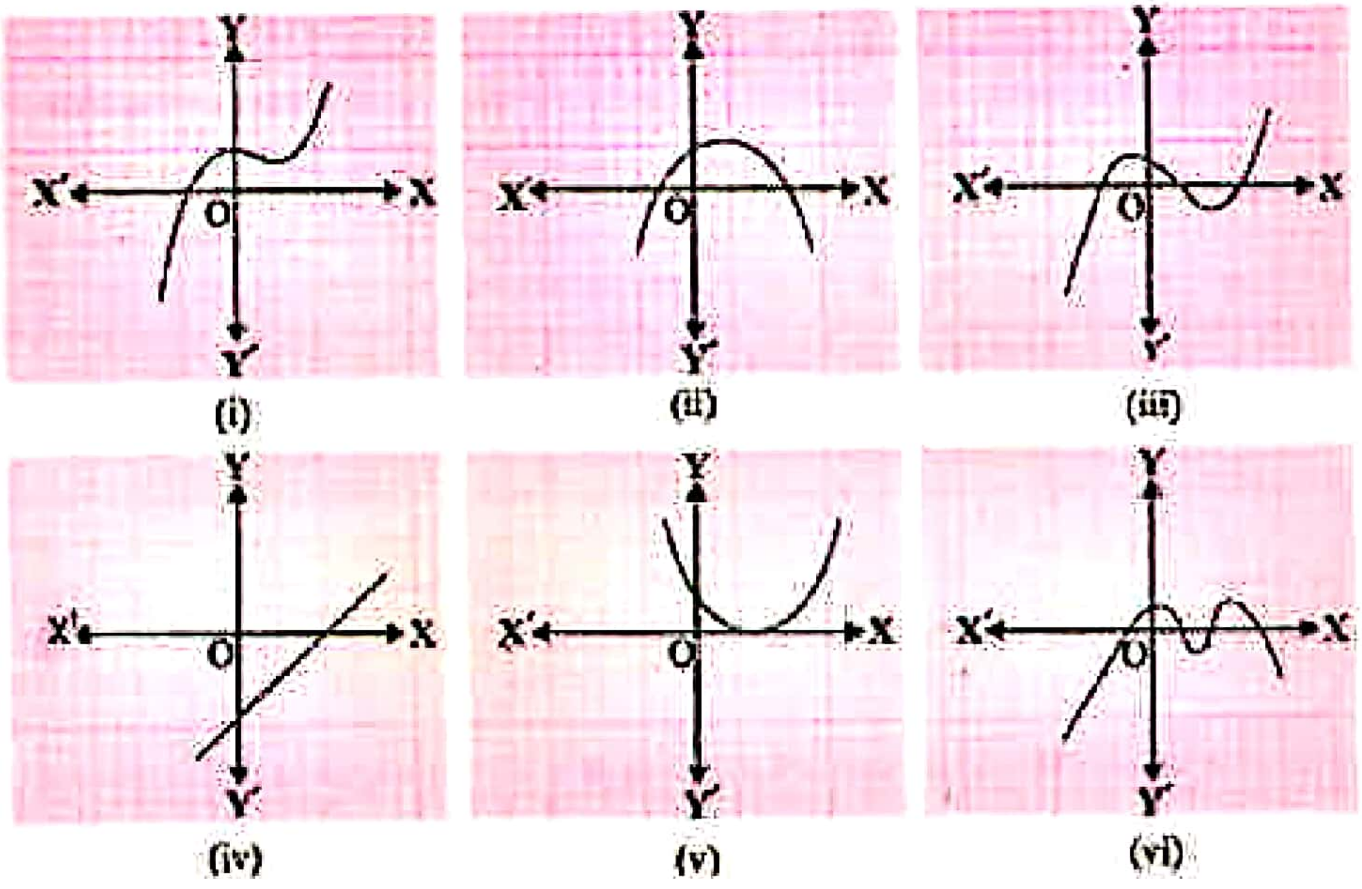
ਚਿੱਤਰ 2.8

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਬਹੁਪਦ x^3 ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ 0 ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 2.7 ਤੋਂ ਵੀ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ 0 ਕੇਵਲ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $y=x^3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ $x^3-x^2=x^2(x-1)$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਪਦ x^3-x^2 ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਕੇਵਲ 0 ਅਤੇ 1 ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 2.8 ਵਿੱਚ ਵੀ ਇਹ ਮੁੱਲ ਕੇਵਲ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y=x^3-x^2$ ਦਾ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਿੰਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਘਾਤ 3 ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਿੰਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ: ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਘਾਤ n ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦੇ ਲਈ $y = p(x)$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ n ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਘਾਤ n ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ n ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਿੱਤਰ 2.9 ਦੇ ਆਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ। ਹਰੇਕ ਚਿੱਤਰ $y = p(x)$ ਜਿੱਥੇ $p(x)$ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ, ਦਾ ਆਲੇਖ ਹੈ। ਆਲੇਖਾਂ ਤੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਦੇ ਲਈ, $p(x)$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 2.9

ਹੱਲ : (i) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 1 ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

(ii) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 2 ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

(iii) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 3 ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

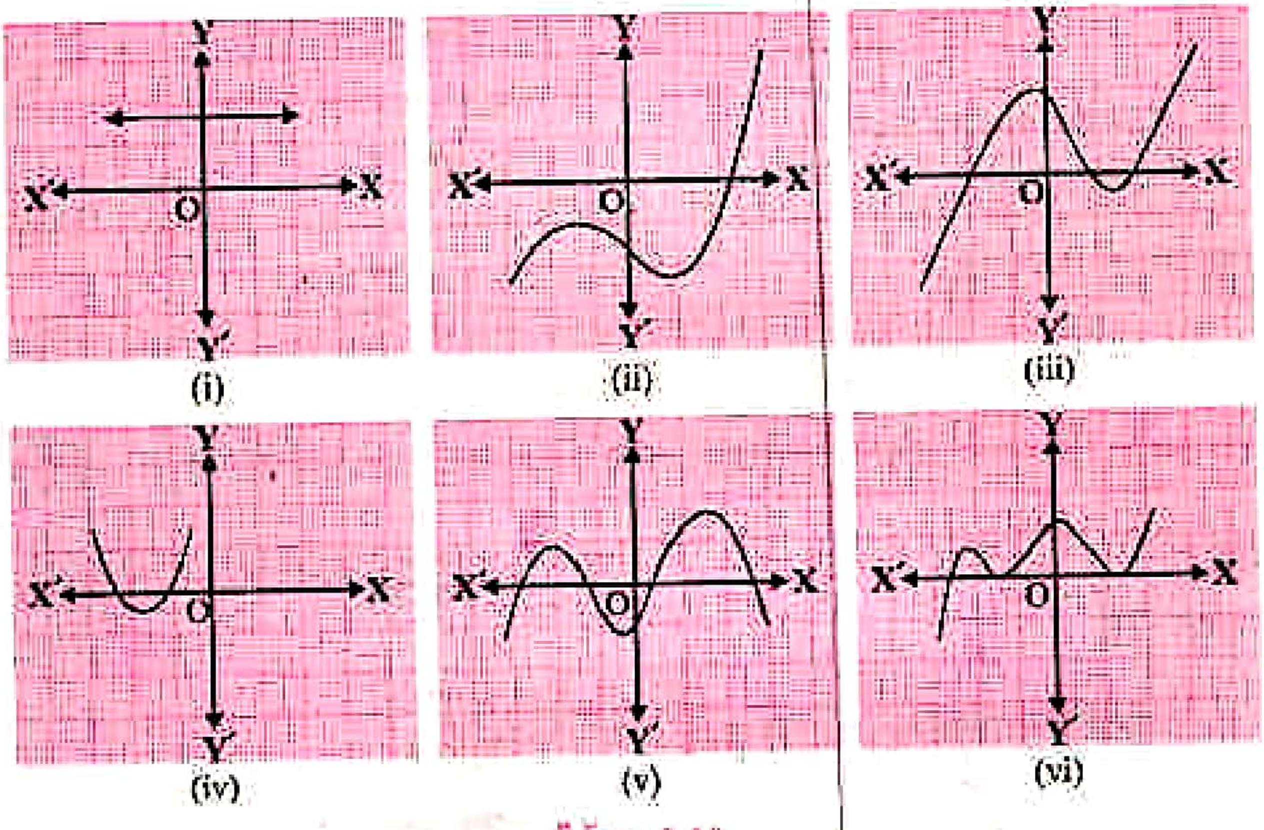
(iv) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 1 ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

(v) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 1 ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

(vi) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 4 ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.1

1. ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦੇ ਲਈ $y = p(x)$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ 2.10 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $p(x)$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 2.10

2.3 ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ

ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ $-\frac{b}{a}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਭਾਗ 2.1 ਵਿੱਚ ਪੁੱਛੇ ਗਏ

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਮੰਨ ਲਉ $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ਲਉ। IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਤੋੜ ਕੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਪਦ '$-8x$' ਨੂੰ ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $6 \times 2x^2 = 12x^2$ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x(x-3) - 2(x-3)$$
$$= (2x-2)(x-3) = 2(x-1)(x-3)$$

ਇਸ ਲਈ, $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਜਦੋਂ $x - 1 = 0$ ਜਾਂ $x - 3 = 0$ ਹੋਵੇ, ਭਾਵ $x = 1$ ਜਾਂ $x = 3$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਲਈ $2x^2 - 8x + 6$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ 1 ਅਤੇ 3 ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ :

$$\text{ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ} = 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

$$\text{ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ} = 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{ਅਚਲ ਪਦ}}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

ਆਉ ਇੱਕ ਹੋਰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ, ਮੰਨ ਲਉ $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$ ਲਉ। ਵਿਚਕਾਰ ਵਾਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਤੋੜਣ 'ਤੇ,

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x+2) - 1(x+2)$$
$$= (3x-1)(x+2)$$

ਇਸ ਲਈ, $3x^2 + 5x - 2$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ $3x - 1 = 0$ ਹੋਵੇ ਜਾਂ $x + 2 = 0$ ਹੋਵੇ, ਭਾਵ ਜਦੋਂ $x = \frac{1}{3}$ ਹੋਵੇ ਜਾਂ $x = -2$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਲਈ $3x^2 + 5x - 2$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $\frac{1}{3}$ ਅਤੇ -2 ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ :

$$\text{ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ} = \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

$$\text{ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ} = \frac{1}{3} \times -2 = \frac{-2}{3} = \frac{\text{ਅਚਲ ਪਦ}}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ * α, β ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $p(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ $x - \alpha$ ਅਤੇ $x - \beta$, $p(x)$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

* α, β ਯੂਨਾਨੀ ਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅੱਖਰ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਅਲਫਾ, ਬੀਟਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਅੱਖਰ γ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਗਾਮਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ,

$$ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta), \text{ ਜਿੱਥੇ } k \text{ ਇੱਕ ਅਚਲ ਹੈ।}$$

$$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$

$$= kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta$$

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ x^2, x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾਂ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$a = k$, $b = -k(\alpha + \beta)$ ਅਤੇ $c = k\alpha\beta$

ਇਸ ਤੋਂ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

ਭਾਵ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$

ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{ਅਚਲ ਪਦ}}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^2 + 7x + 10$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ : $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$

ਇਸ ਲਈ $x^2 + 7x + 10$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਦ $x + 2 = 0$ ਹੋਵੇਗਾ ਜਾਂ $x + 5 = 0$ ਹੋਵੇਗਾ ਭਾਵ $x = -2$ ਜਾਂ $x = -5$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ $x^2 + 7x + 10$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ -2 ਅਤੇ -5 ਹਨ। ਹੁਣ

ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= -2 + (-5) = -7 = \frac{-(7)}{1} = \frac{-(x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$

ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $= -2 \times -5 = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{ਅਚਲ ਪਦ}}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਬਹੁਪਦ $x^2 - 3$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਰਬਸਮਤਾ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ। ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

ਇਸ ਲਈ, $x^2 - 3$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਦ $x = \sqrt{3}$ ਹੋਵੇ ਜਾਂ $x = -\sqrt{3}$

ਇਸ ਲਈ, $x^2 - 3$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $\sqrt{3}$ ਅਤੇ $-\sqrt{3}$ ਹਨ। ਹੁਣ

ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \dfrac{-(x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$

ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $= (\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = -3 = \dfrac{-3}{1} = \dfrac{\text{ਅਚਲ ਪਦ}}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ -3 ਅਤੇ 2 ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਸਿਫ਼ਰ α ਅਤੇ β ਹਨ।

$$\therefore \quad \alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$$

ਜੇਕਰ $a = 1$ ਹੈ ਤਾਂ $b = 3$ ਅਤੇ $c = 2$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ, ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, $x^2 + 3x + 2$ ਹੈ।

ਤੁਸੀਂ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਹੋਰ ਕੋਈ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਜੋ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ, $k(x^2 + 3x + 2)$ ਵਰਗੀ ਹੋਵੇਗੀ, ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ?

ਆਉ $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਤੁਸੀਂ ਇਸਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $x=4, -2$ ਅਤੇ $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਲਈ $p(x) = 0$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $p(x)$ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਿੰਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ ਦੇ ਇਹ ਹੀ ਤਿੰਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹਨ। ਹੁਣ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= 4 + (-2) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2} = \dfrac{-(-5)}{2} = \dfrac{-(x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^3 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$

ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $= 4 \times -2 \times \dfrac{1}{2} = -4 = \dfrac{-8}{2} = \dfrac{-\text{ ਅਚਲ ਪਦ}}{x^3 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸੰਬੰਧ ਵੀ ਹੈ। ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕਠਾ ਲੈ ਕੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ : $\{4\times(-2)\}+\left\{(-2)\times\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{1}{2}\times 4\right\}$

$$= -8-1+2=-7=\frac{-14}{2}=\frac{x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}{x^3 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ α, β, γ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ax^3+bx^2+cx+d ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋਣ, ਤਾਂ

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=\frac{-d}{a}$$

ਆਓ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 5* : ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $p(x)=3x^3-5x^2-11x-3$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $3, -1$ ਅਤੇ $-\frac{1}{3}$ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਉਪਰੰਤ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ax^3+bx^2+cx+d ਨਾਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$a=3, b=-5, c=-11, d=-3$ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ,

$p(3)=3\times 3^3-(5\times 3^2)-(11\times 3)-3=81-45-33-3=0$

$p(-1)=3\times(-1)^3-5\times(-1)^2-11\times(-1)-3=-3-5+11-3=0$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right)=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3-5\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2-11\times\left(-\frac{1}{3}\right)-3$$

$$=-\frac{1}{9}-\frac{5}{9}+\frac{11}{3}-3=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$$

* ਇਹ ਉਦਾਹਰਣ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $3x^3-5x^2-11x-3$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ 3, −1 ਅਤੇ $-\frac{1}{3}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ $\alpha=3, \beta=-1$ ਅਤੇ $\gamma=-\frac{1}{3}$ ਲਈ ਹਨ। ਹੁਣ

$$\alpha+\beta+\gamma=3+(-1)+\left(-\frac{1}{3}\right)=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}=\frac{-(-5)}{3}=\frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3\times(-1)+(-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\times 3=-3+\frac{1}{3}-1=\frac{-11}{3}=\frac{c}{a}$$

ਅਤੇ $\alpha\beta\gamma=3\times(-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=1=\frac{-(-3)}{3}=\frac{-d}{a}$ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ :

   (i) x^2-2x-8 (ii) $4s^2-4s+1$ (iii) $6x^2-3-7x$

   (iv) $4u^2+8u$ (v) t^2-15 (vi) $3x^2-x-4$

2. ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ :

   (i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

   (iv) 1, 1 (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) 4, 1

2.4 ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਿੰਨ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਦਿੱਤੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੂਸਰੀਆਂ (ਦੋ) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਇਸਦੇ ਲਈ, ਆਓ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ x^3-3x^2-x+3 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੱਸੀਏ ਕਿ ਇਸਦੀ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ 1 ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ x^3-3x^2-x+3 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ $x-1$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ x^3-3x^2-x+3 ਨੂੰ $x-1$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ x^2-2x-3 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਤੋੜ ਕੇ x^2-2x-3 ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ $(x+1)(x-3)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਭਾਵ

$$x^3-3x^2-x+3=(x-1)(x^2-2x-3)$$

$$= (x-1)(x+1)(x-3)$$

ਇਸ ਲਈ, ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸਿਫ਼ਰ 1, –1 ਅਤੇ 3 ਹਨ।

ਆਉ ਹੁਣ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਬਹੁਪਦ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ (ਕਲਨ ਵਿਧੀ) ਦੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ। ਵਿਧੀ ਪੂਰਵਕ ਪਗਾਂ 'ਤੇ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : $2x^2 + 3x + 1$ ਨੂੰ $x + 2$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿਉ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜਦੋਂ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਵੇ ਜਾਂ ਇਸਦੀ ਘਾਤ ਭਾਜਕ ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੋ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਭਾਗ ਕਰਨੀ ਬੰਦ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ, ਇੱਥੇ ਭਾਗਫਲ $2x - 1$ ਅਤੇ ਬਾਕੀ 3 ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ,

$$\begin{array}{r|l} & 2x-1 \\ \hline x+2 & 2x^2+3x+1 \\ & 2x^2+4x \\ & \underline{-\quad -} \\ & -x+1 \\ & -x-2 \\ & \underline{+\quad +} \\ & 3 \end{array}$$

$(2x-1)(x+2) + 3 = 2x^2 + 3x - 2 + 3 = 2x^2 + 3x + 1$

ਭਾਵ $\quad 2x^2 + 3x + 1 = (x+2)(2x-1) + 3$

ਇਸ ਲਈ : ਭਾਜ = ਭਾਜਕ × ਭਾਗਫਲ + ਬਾਕੀ

ਆਉ ਹੁਣ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ ਲਈ ਅੱਗੇ ਵਧਾਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ ਨੂੰ $1 + 2x + x^2$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਭਾਜਕ ਅਤੇ ਭਾਜ ਨੂੰ ਪਦਾਂ ਦੀਆਂ ਘਟਦੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਘਾਤਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਤਰਤੀਬ-ਬੱਧ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਣ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਮਿਆਰੀ (standard) ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ, ਭਾਜਕ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਭਾਜਕ $x^2 + 2x + 1$ ਹੈ।

$$\begin{array}{r|l} & 3x-5 \\ \hline x^2+2x+1 & 3x^3+x^2+2x+5 \\ & 3x^3+6x^2+3x \\ & \underline{-\quad -\quad -} \\ & -5x^2-x+5 \\ & -5x^2-10x-5 \\ & \underline{+\quad +\quad +} \\ & 9x+10 \end{array}$$

ਪਗ 1 : ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ (ਵੱਡੇ ਤੋਂ ਵੱਡੇ) ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਪਦ (ਭਾਵ $3x^3$) ਨੂੰ ਭਾਜਕ ਦੇ ਵੱਡੇ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਪਦ (ਭਾਵ x^2) ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿਉ। ਇਹ $3x$ ਹੈ। ਹੁਣ ਭਾਗ ਦੇਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਰੋ। ਜੋ ਬਾਕੀ ਬਚਦਾ ਹੈ ਉਹ $-5x^2 - x + 5$ ਹੈ।

ਪਗ 2 : ਹੁਣ ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਨਵੀਂ ਭਾਜ ਦੇ ਵੱਡੇ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਪਦ (ਭਾਵ $-5x^2$) ਨੂੰ ਭਾਜਕ ਦੇ ਵੱਡੇ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਪਦ (ਭਾਵ x^2) ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੋ। ਇਸ ਨਾਲ -5 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ $-5x^2 - x + 5$ ਨੂੰ ਭਾਗ ਦੇਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਰੋ।

ਪਗ 3 : ਹੁਣ ਬਾਕੀ ਬਚੇ $9x + 10$ ਦੀ ਘਾਤ ਭਾਜਕ $x^2 + 2x + 1$ ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਭਾਗ ਦੇਣ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਹੋਰ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ।

ਇਸ ਲਈ, ਭਾਗਫਲ $3x - 5$ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ $9x + 10$ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ,

$$(x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) = 3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10$$

$$= 3x^3 + x^2 + 2x + 5$$

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਫਿਰ ਤੋਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਭਾਜ = ਭਾਜਕ × ਭਾਗਫਲ + ਬਾਕੀ

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਜਿਸ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ ਉਹ ਯੁਕਲਿਡ ਦੀ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਜਿਸ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਪਾਠ 1 ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ, ਵਰਗੀ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਅਨੁਸਾਰ,

ਜੇਕਰ $p(x)$ ਅਤੇ $g(x)$ ਕੋਈ ਦੋ ਬਹੁਪਦ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $g(x) \neq 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਬਹੁਪਦ $q(x)$ ਅਤੇ $r(x)$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$$

ਜਿੱਥੇ $r(x) = 0$ ਜਾਂ $r(x)$ ਦੀ ਘਾਤ $< g(x)$ ਦੀ ਘਾਤ ਹੈ।

ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ, ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ ਨੂੰ $x - 1 - x^2$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿਉ ਅਤੇ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਹੁਪਦ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਭਾਗ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਭਾਜ ਅਤੇ ਭਾਜਕ ਦੋਹਾਂ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਘਟਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ, ਭਾਜ $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ ਅਤੇ

ਭਾਜਕ $= -x^2 + x - 1$ ਹੈ।

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ -x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ & -x^3 + x^2 - x \\ & \underline{+ \quad - \quad +} \\ & 2x^2 - 2x + 5 \\ & 2x^2 - 2x + 2 \\ & \underline{- \quad + \quad -} \\ & 3 \end{array}$$

ਭਾਗ ਦੇਣ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਰੁੱਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ 3 ਦੀ ਘਾਤ 0, $-x^2 + x - 1$ ਦੀ ਘਾਤ 2 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਭਾਗ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰਕੇ ਬਾਕੀ 3 ਅਤੇ ਭਾਗਫਲ $x - 2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ

ਭਾਜਕ × ਭਾਗਫਲ + ਬਾਕੀ

$$= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$$

$$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$$

$$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$$

= ਭਾਜ

ਇਸ ਲਈ, ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਸੱਚ ਸਾਬਤ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ $\sqrt{2}$ ਅਤੇ $-\sqrt{2}$ ਪਤਾ ਹੋਣ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ $\sqrt{2}$ ਅਤੇ $-\sqrt{2}$ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) = x^2 - 2$ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਹੁਣ ਆਉ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਹੁਪਦ ਅਤੇ $x^2 - 2$ ਦੇ ਲਈ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 1 \\
x^2 - 2 & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\
 & \underline{\underset{-}{2x^4} \qquad \underset{+}{-4x^2}} \\
 & -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 & \underline{\underset{+}{-3x^3} \qquad \underset{-}{+6x}} \\
 & x^2 - 2 \\
 & \underline{\underset{-}{x^2} \quad \underset{+}{-2}} \\
 & 0
\end{array}
$$

ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ $\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$ ਹੈ।

ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਪਦ $\frac{-3x^3}{x^2} = -3x$ ਹੈ।

ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਤੀਸਰਾ ਪਦ $\frac{x^2}{x^2} = 1$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$

ਹੁਣ $-3x$ ਨੂੰ ਤੋੜਦੇ ਹੋਏ $2x^2 - 3x + 1$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ $(2x - 1)(x - 1)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $x = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $x = 1$ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}$ ਅਤੇ 1 ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.3

1. ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ $g(x)$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ ਭਾਗਫਲ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$, $\quad g(x) = x^2 - 2$

   (ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$, $\quad g(x) = x^2 + 1 - x$

   (iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6$, $\quad g(x) = 2 - x^2$

2. ਦੂਸਰੀ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਪਹਿਲੀ ਬਹੁਪਦ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਪਹਿਲੀ ਬਹੁਪਦ, ਦੂਸਰੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ :

   (i) $t^2 - 3, 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

   (ii) $x^2 + 3x + 1, 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

   (iii) $x^3 - 3x + 1, x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

3. ਜੇਕਰ $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ ਦੇ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰ $\sqrt{\frac{5}{3}}$ ਅਤੇ $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ ਹੋਣ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਬਹੁਪਦ $x^3 - 3x^2 + x + 2$ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ $g(x)$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ ਭਾਗਫਲ $x - 2$ ਅਤੇ ਬਾਕੀ $-2x + 4$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $g(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਬਹੁਪਦ $p(x), g(x), q(x)$ ਅਤੇ $r(x)$ ਦੇ ਅਜਿਹੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਿਉ ਜੋ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਣ ਅਤੇ

   (i) ਘਾਤ $p(x)$ = ਘਾਤ $q(x)$ (ii) ਘਾਤ $q(x)$ = ਘਾਤ $r(x)$ (iii) ਘਾਤ $r(x) = 0$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.4 (ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ)*

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹਨ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਵੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ :

   (i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2;\ \frac{1}{2}, 1, -2$ (ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2;\ 2, 1, 1$

2. ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕਠਾ ਲੈ ਕੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਤਿੰਨਾਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2, –7, –14 ਹੈ।

3. ਜੇਕਰ ਬਹੁਪਦ $x^3 - 3x^2 + x + 1$ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ $a - b, a, a + b$ ਹੋਣ ਤਾਂ a ਅਤੇ b ਪਤਾ ਕਰੋ।

* ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

4. ਜੇਕਰ ਬਹੁਪਦ $x^4-6x^3-26x^2+138x-35$ ਦੇ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰ $2\pm\sqrt{3}$ ਹੋਣ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਜੇਕਰ ਬਹੁਪਦ $x^4-6x^3+16x^2-25x+10$ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਬਹੁਪਦ x^2-2x+k ਨਾਲ ਭਾਗ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਅਤੇ ਬਾਕੀ $x+a$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ k ਅਤੇ a ਪਤਾ ਕਰੋ।

2.5 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਘਾਤ 1, 2 ਅਤੇ 3 ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ, ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
2. ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ax^2+bx+c, ਜਿੱਥੇ a, b, c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a\neq 0$ ਹੈ, ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $y=p(x)$ ਦਾ ਆਲੇਖ x–ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।
4. ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਿੰਨ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।
5. ਜੇਕਰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ax^2+bx+c ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ α ਅਤੇ β ਹੋਣ ਤਾਂ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

6. ਜੇਕਰ α, β, γ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

ਅਤੇ $$\alpha\beta\gamma=\frac{-d}{a}$$

7. ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਅਤੇ ਇੱਕ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਬਹੁਪਦ $g(x)$ ਦੇ ਲਈ ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਹੁਪਦ $q(x)$ ਅਤੇ $r(x)$ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਕਿ

$$p(x)=g(x)\,q(x)+r(x),$$

ਜਿੱਥੇ $r(x)=0$ ਹੈ ਜਾਂ ਘਾਤ $r(x)<$ ਘਾਤ $g(x)$ ਹੈ।