ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ REAL NUMBERS 1

1.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਨੌਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਖੋਜ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰੀਕਿਰਿਆ ਦੌਰਾਨ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਮਿਲੀ। ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਆਪਣੀ ਚਰਚਾ ਜਾਰੀ ਰੱਖਾਂਗੇ। ਇਹ ਚਰਚਾ ਅਸੀਂ ਭਾਗ 1.2 ਅਤੇ 1.3 ਵਿੱਚ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ (integers) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦੋ ਬਹੁਤ ਹੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਗੁਣਾਂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਾਂਗੇ ਇਹ ਗੁਣ ਹਨ : ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ (ਕਲਨ ਵਿਧੀ) (Euclid's division algorithm ਅਤੇ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) (Fundamental Theorem Arithmetic)।

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਨਾਮ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ, ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (integers) ਦੀ ਵੰਡ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਨਾ ਕਿਸੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਸਧਾਰਨ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਦੂਸਰੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ b ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਬਾਕੀ r ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ, ਜੋ b ਤੋਂ ਛੋਟਾ (ਘੱਟ) ਹੋਵੇ। ਤੁਹਾਡੇ ਵਿੱਚੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਲੋਕ ਸ਼ਾਇਦ ਇਸਨੂੰ ਸਧਾਰਨ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਪ੍ਰੀਕਿਰਿਆ (long division process) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਦੇ ਹਨ। ਭਾਵੇਂ ਕਿ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ (ਸਿੱਟਾ) ਕਹਿਣ ਅਤੇ (ਸਮਝਣ) ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਰਲ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਇਸ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੁਝ 'ਤੇ ਰੌਸ਼ਨੀ ਪਾਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਮੁੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਮਹੱਤਮ ਸਮਾਪਵਰਤਕ (HCF) ਕੱਢਣ ਦੇ ਬਾਰੇ ਕਰਾਂਗੇ।

ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਤੋਂ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ (composite number) ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (prime numbers) ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਤੱਥ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਥਿਊਰਮ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ (ਸਿੱਟਾ) ਕਹਿਣ ਅਤੇ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਰਲ ਹੈ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਗਣਿਤ ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਥਿਊਰਮ ਦੀਆਂ ਦੋ ਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੇਖਾਂਗੇ। ਇੱਕ ਤਾਂ ਅਸੀ

ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜੀਆਂ ਗਈਆਂ ਕੁਝ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ਅਤੇ $\sqrt{5}$ ਆਦਿ ਦੀ ਅਪਰਿਮੇਯਤਾ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਰਾਂਗੇ। ਦੂਸਰਾ, ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਇਹ ਲੱਭਣ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ, ਮੰਨ ਲਉ $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਕਦੋਂ ਸ਼ਾਂਤ (terminating) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਦੋਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (non-terminating repeating) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਅਸੀਂ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਹਰ, q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਨੂੰ ਦੇਖ ਕੇ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਤੋਂ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਰੂਪ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਤੀ ਦਾ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਲੱਗ ਜਾਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ, ਆਓ ਆਪਣੀ ਖੋਜ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ।

1.2 ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਿਕਾ (Euclid's division Lemma)

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਲੋਕ ਬੁਝਾਰਤ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ:*

ਇੱਕ ਵਿਕਰੇਤਾ ਸੜਕ 'ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹੋਇਆ ਆਂਡੇ ਵੇਚ ਰਿਹਾ ਸੀ। ਇੱਕ ਆਲਸੀ ਆਦਮੀ ਜਿਸਦੇ ਕੋਲ ਕੋਈ ਕੰਮ ਨਹੀਂ ਸੀ, ਨੇ ਉਸ ਵਿਕਰੇਤਾ ਨਾਲ ਸ਼ਬਦੀ ਜੰਗ (ਝਗੜਾ) ਚਾਲੂ ਕਰ ਦਿੱਤਾ। ਇਸ ਨਾਲ ਗੱਲ ਅੱਗੇ ਵੱਧ ਗਈ ਅਤੇ ਉਸਨੇ ਆਂਡਿਆਂ ਦੀ ਟੋਕਰੀ ਖੋਹ ਕੇ ਸੜਕ 'ਤੇ ਸੁੱਟ ਦਿੱਤੀ। ਆਂਡੇ ਟੁੱਟ ਗਏ। ਵਿਕਰੇਤਾ ਨੇ ਪੰਚਾਇਤ ਨੂੰ ਕਿਹਾ ਕਿ ਉਸ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਟੁੱਟੇ ਹੋਏ ਆਂਡਿਆਂ ਦੇ ਪੈਸੇ ਦੇਣ ਨੂੰ ਕਹੇ। ਪੰਚਾਇਤ ਨੇ ਵਿਕਰੇਤਾ ਨੂੰ ਪੁੱਛਿਆ ਕਿ ਕਿੰਨੇ ਆਂਡੇ ਟੁੱਟੇ ਸਨ। ਉਸਨੇ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਉੱਤਰ ਦਿੱਤਾ:

ਦੋ-ਦੋ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਇੱਕ ਬਚੇਗਾ;
ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਦੋ ਬਚਣਗੇ;
ਚਾਰ-ਚਾਰ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਤਿੰਨ ਬਚਣਗੇ;
ਪੰਜ-ਪੰਜ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਚਾਰ ਬਚਣਗੇ;
ਛੇ-ਛੇ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਪੰਜ ਬਚਣਗੇ;
ਸੱਤ-ਸੱਤ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬਚੇਗਾ;
ਮੇਰੀ ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ 150 ਤੋਂ ਵੱਧ ਆਂਡੇ ਨਹੀਂ ਆ ਸਕਦੇ।

ਇਸ ਲਈ ਕਿੰਨੇ ਅੰਡੇ ਸਨ? ਆਓ ਇਸ ਬੁਝਾਰਤ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੀਏ। ਮੰਨ ਲਓ ਆਂਡਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ a ਹੈ। ਹੁਣ ਉਲਟੇ ਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a ਸੰਖਿਆ 150 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੈ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

* ਇਹ ਲੇਖਕ ਦੇ, ਰਾਮਪਾਲ ਅਤੇ ਹੋਰ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖੀ ਕਿਤਾਬ ਨਿਊਮੇਰੇਸੀ ਕਾਊਂਟਸ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਬੁਝਾਰਤ ਦਾ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ (ਬਦਲਵਾਂ) ਰੂਪ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਸੱਤ-ਸੱਤ ਗਿਣੀਏ ਤਾਂ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬਚੇਗਾ। ਇਹ $a = 7p + 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਛੇ-ਛੇ ਗਿਣੀਏ ਤਾਂ 5 ਬਚਣਗੇ। ਇਹ $a = 6q + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪੰਜ-ਪੰਜ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 4 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਹ $a = 5s + 4$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ s ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਚਾਰ-ਚਾਰ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 3 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਹ $a = 4t + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ t ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 2 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਹ $a = 3u + 2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ u ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਦੋ-ਦੋ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 1 ਬਚੇਗਾ। ਇਹ $a = 2v + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ v ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਭਾਵ, ਉਪਰੋਕਤ ਹਰ ਇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਹਨ (ਲਏ ਗਏ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ b ਦੇ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 7, 6, 5, 4, 3 ਅਤੇ 2 ਹਨ)। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ a ਨੂੰ b ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ r ਬਾਕੀ ਬਚਦਾ ਹੈ (ਉਪਰੋਕਤ ਵਿੱਚ r ਦੇ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 0, 5, 4, 3, 2 ਅਤੇ 1 ਹਨ) ਭਾਵ r ਭਾਜਕ b ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ (Euclid's division lemma) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਹੁਣ, ਅਸੀਂ ਬੁਝਾਰਤ 'ਤੇ ਵਾਪਿਸ ਆਉਂਦੇ ਹੋਏ, ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚ ਕੇ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਸ ਬੁਝਾਰਤ ਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ? ਹਾਂ, ਤੁਸੀਂ 7 ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣਜਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਣ। ਜਾਂਚ ਅਤੇ ਭੁੱਲ ਵਿਧੀ ਨਾਲ LCM ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਤੁਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਆਂਡਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 119 ਸੀ।

ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਅਨੁਭਵ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਿਕਾ ਕੀ ਹੈ, ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਜੋੜਿਆਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ:

(i) 17, 6 (ii) 5, 12 (iii) 20, 4

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਬੁਝਾਰਤ ਵਾਲੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਸੀ, ਇੱਥੇ ਵੀ ਅਸੀਂ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਲਈ ਸੰਬੰਧ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

(i) $17 = 6 \times 2 + 5$ (17 ਵਿੱਚੋਂ 6 ਦੋ ਵਾਰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ 5 ਬਾਕੀ ਬੱਚਦਾ ਹੈ)

(ii) $5 = 12 \times 0 + 5$ (ਇਹ ਸੰਬੰਧ ਇਸ ਲਈ ਸਹੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ 12, 5 ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ)

(iii) $20 = 4 \times 5 + 0$ (20 ਵਿੱਚੋਂ 4 ਪੰਜ ਵਾਰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬੱਚਦਾ)

ਭਾਵ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$a = bq + r, 0 \le r < b$$ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ q ਅਤੇ r ਸਿਫ਼ਰ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਲਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ:

(i) 10, 3 (ii) 4, 19 (iii) 81, 3

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਕਿ q ਅਤੇ r ਵਿਲੱਖਣ ਹਨ? ਇਹ ਹੀ ਕੇਵਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਸੰਬੰਧ $a = bq + r, 0 \leq r < b$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਲਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਇਹ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੁਝ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਕਾਫੀ ਸਾਲਾਂ ਤੋਂ ਕਰਦੇ ਆ ਰਹੇ ਹੋ ਅਤੇ q ਅਤੇ r ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭਾਗਫਲ *(quotient)* ਅਤੇ ਬਾਕੀ *(remainder)* ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ *(formal)* ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 1.1 ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਿਕਾ ***(Euclid's division lemma)*** ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਲਈ ਦੋ ਵਿਲੱਖਣ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿ $a = bq + r,\ 0 \leq r < b$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਬਹੁਤ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਸੀ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਲਿਖਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਉਲੇਖ ਯੂਕਲਿਡ ਐਲੀਮੈਂਟਸ (Euclid's Elements) ਦੀ ਪੁਸਤਕ VII ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ (ਕਲਨ ਵਿਧੀ) ਇਸੇ ਹੀ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ (Lemma) 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।

ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਪਗਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਲੜੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜੋ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਜਾਂ ਵਿਧੀ ਦਸਦੀ ਹੈ।

ਸ਼ਬਦ 'ਐਲਗੋਰਿਥਮ' 9ਵੀਂ ਸਦੀ ਦੇ ਇੱਕ ਫ਼ਾਰਸੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਅਲ-ਖ਼ੁਆਰਿਜ਼ਮੀ ਦੇ ਨਾਮ ਤੋਂ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ 'ਅਲਜਬਰਾ'(Algebra) ਵੀ ਇਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖੀ ਪੁਸਤਕ 'ਹਿਸਾਬ ਅਲ ਜ਼ਬਰ ਵੀ ਅਲ ਮੁਕਾਬਲਾ' ਤੋਂ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਇੱਕ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਵਰਤਦੇ ਹਨ।

ਮੁਹੰਮਦ ਇਬਨ ਮੂਸਾ ਅਲ ਖ਼ੁਆਰਿਜ਼ਮੀ
(780 – 850 ਈ.)

ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਦਾ ਇੱਕ ਤਰੀਕਾ ਹੈ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ d ਹੈ, ਜੋ a ਅਤੇ b ਦੋਵਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਭਾਗ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਆਓ ਸਾਰਿਆਂ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈ ਕੇ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਹ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੰਮ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 455 ਅਤੇ 42 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੱਡੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ 455 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$455 = 42 \times 10 + 35$$

ਹੁਣ ਭਾਜਕ 42 ਅਤੇ ਬਾਕੀ 35 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ, ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$42 = 35 \times 1 + 7$$

ਹੁਣ ਭਾਜਕ 35 ਅਤੇ ਬਾਕੀ 7 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ, ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$35 = 7 \times 5 + 0$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ (ਜ਼ੀਰੋ) ਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਅੱਗੇ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ। ਅਸੀਂ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਾਲਾ ਭਾਜਕ ਭਾਵ 7 ਹੀ 455 ਅਤੇ 42 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ 455 ਅਤੇ 42 ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖ ਕੇ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਹ ਵਿਧੀ ਕਿਸ ਕਾਰਣ ਕੰਮ ਕਰ ਜਾਂਦੀ ਹੈ?

ਇਸ ਦਾ ਕਾਰਣ **ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ** ਹੈ, ਇਸਦੇ ਪਗਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ:

ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮੰਨ ਲਉ c ਅਤੇ d ($c>d$) ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਗਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਕੰਮ ਕਰੋ:

ਪਗ 1: c ਅਤੇ d ਦੇ ਲਈ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ। ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ q ਅਤੇ r ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $c = dq + r$, $0 \leq r < d$ ਹੋਵੇ।

ਪਗ 2: ਜੇਕਰ $r = 0$ ਹੈ, ਤਾਂ d ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ c ਅਤੇ d ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਹੈ। ਜੇਕਰ $r \neq 0$ ਹੈ, ਤਾਂ d ਅਤੇ r ਦੇ ਲਈ, ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।

ਪਗ 3: ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਉਦੋਂ ਤਕ ਜਾਰੀ ਰੱਖੋ, ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ (ਜ਼ੀਰੋ) ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਾ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਭਾਜਕ ਹੀ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਹੈ।

ਇਹ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਭਾਵਸ਼ਾਲੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ HCF (c, d) = HCF (d, r) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸੰਕੇਤ HCF (c, d) ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ c ਅਤੇ d ਦਾ HCF।

ਉਦਾਹਰਣ: 4052 ਅਤੇ 12576 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ:

ਪਗ 1: ਇੱਥੇ 12576 > 4052 ਹੈ। 12576 ਅਤੇ 4052 ਉੱਪਰ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$12576 = 4052 \times 3 + 420$$

ਪਗ 2: ਕਿਉਂਕਿ ਬਾਕੀ $420 \neq 0$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ 4052 ਅਤੇ 420 ਦੇ ਲਈ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$4052 = 420 \times 9 + 272$$

ਪਗ 3: ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 420 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 272 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$420 = 272 \times 1 + 148$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 272 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 148 'ਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$272 = 148 \times 1 + 124$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 148 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 124 'ਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 124 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 24 'ਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 24 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 4 'ਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$24 = 4 \times 6 + 0$$

ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ (0) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਇੱਥੇ ਖਤਮ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਭਾਜਕ 4 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 12576 ਅਤੇ 4052 ਦਾ *H.C.F* 4 ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ HCF (24, 4) = HCF (124, 24) = HCF (148, 124) = HCF (272, 148) = HCF (420, 272) = HCF (4052, 420) = HCF (12576, 4052) ਹੈ।

ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਨਾ ਸਿਰਫ਼ ਵੱਡੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ, ਬਲਕਿ ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਵੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਉਹਨਾਂ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਕੰਪਿਊਟਰ ਦੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰੋਗ੍ਰਾਮ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ।

ਟਿੱਪਣੀ:

1. ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਅਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੁੜੇ ਹੋਏ ਹਨ ਕਿ ਲੋਕ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਨੂੰ ਹੀ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
2. ਭਾਵੇਂ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ/ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਨੂੰ ਸਿਰਫ਼ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਹੀ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਸਿਫ਼ਰ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਭਾਵ $b \neq 0$)

ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵੇਂ, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤੱਥ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ/ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹੇਠਾਂ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ:

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $2q$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ $2q+1$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ a ਕੋਈ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $b = 2$ ਹੈ। ਹੁਣ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਤੋਂ, ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $q \geq 0$ ਦੇ ਲਈ $a = 2q + r$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $r = 0$ ਹੈ ਜਾਂ $r = 1$ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $0 \leq r < 2$ ਇਸ ਲਈ $a = 2q$ ਜਾਂ $a = 2q + 1$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $a = 2q$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਤਾਂ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਟਾਂਕ। ਇਸ ਲਈ ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $2q + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $4q + 1$ ਜਾਂ $4q + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਆਉ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਸਵਾਲ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ। ਅਸੀਂ a ਅਤੇ $b = 4$ 'ਤੇ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਕਿਉਂਕਿ $0 \leq r < 4$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸੰਭਾਵਿਤ ਬਾਕੀ 0, 1, 2 ਅਤੇ 3 ਹਨ।

ਭਾਵ a ਸੰਖਿਆਵਾਂ $4q$, $4q + 1$, $4q + 2$ ਜਾਂ $4q + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ q ਭਾਗਫਲ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ a ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ $4q$ ਅਤੇ $4q + 2$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ (ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਵੇਂ 2 'ਤੇ ਵੰਡੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ)।

ਇਸ ਲਈ, ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $4q + 1$ ਜਾਂ $4q + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਇੱਕ ਮਠਿਆਈ ਵਿਕ੍ਰੇਤਾ ਕੋਲ 420 ਕਾਜੂ ਦੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਅਤੇ 130 ਬਦਾਮ ਦੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਹਨ। ਉਹ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਢੇਰੀਆਂ ਬਣਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਢੇਰੀ ਵਿੱਚ ਬਰਫੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਰਹੇ ਅਤੇ ਇਹ ਢੇਰੀਆਂ ਬਰਫੀ ਦੀ ਪਰਾਤ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਥਾਨ ਘੇਰਨ। ਇਸ ਕੰਮ ਲਈ ਹਰ ਇੱਕ ਢੇਰੀ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਰੱਖੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ?

ਹੱਲ: ਇਹ ਕੰਮ ਜਾਂਚ ਅਤੇ ਭੁੱਲ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਸ ਨੂੰ ਲੜੀਬੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ HCF (420, 130) ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ, ਇਸ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਤੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਢੇਰੀ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀਆਂ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਿਣਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ। ਜਿਸ ਨਾਲ ਢੇਰੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਪਰਾਤ ਵਿੱਚ ਇਹ ਬਰਫੀਆਂ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਥਾਨ ਘੇਰਣਗੀਆਂ।

ਆਉ ਹੁਣ ਯੁਕਲਿਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ 420 ਅਤੇ 130 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਪਤਾ ਕਰੀਏ।

$$420 = 130 \times 3 + 30$$
$$130 = 30 \times 4 + 10$$
$$30 = 10 \times 3 + 0$$

ਇਸ ਲਈ, 420 ਅਤੇ 130 ਦਾ HCF 10 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਹਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਬਰਫੀ ਦੇ ਲਈ ਮਠਿਆਈ ਵਿਕ੍ਰੇਤਾ ਦਸ-ਦਸ ਦੀਆਂ ਢੇਰੀਆਂ ਬਣਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.1

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ:
   (i) 135 ਅਤੇ 225 (ii) 196 ਅਤੇ 38220 (iii) 867 ਅਤੇ 255
2. ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $6q+1$ ਜਾਂ $6q+3$ ਜਾਂ $6q+5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
3. ਕਿਸੇ ਪਰੇਡ ਵਿੱਚ 616 ਆਦਮੀਆਂ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸੈਨਾ (ਆਰਮੀ) ਦੀ ਟੁੱਕੜੀ ਨੇ 32 ਆਦਮੀਆਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸੈਨਾ ਬੈਂਡ ਦੇ ਪਿੱਛੇ ਮਾਰਚ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਦੋਹਾਂ ਸਮੂਹਾਂ ਨੇ ਬਰਾਬਰ ਗਿਣਤੀ ਵਾਲੇ ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਵਿੱਚ ਮਾਰਚ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਿਣਤੀ ਕਿੰਨੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮਾਰਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ?
4. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ, ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ m ਦੇ ਲਈ $3m$ ਜਾਂ $3m+1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   [ਸੰਕੇਤ : ਮੰਨ ਲਉ x ਕੋਈ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਇਹ $3q$, $3q+1$ ਜਾਂ $3q+2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਦਾ ਵਰਗ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ $3m$ ਜਾਂ $3m+1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।]
5. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ $9m$, $9m+1$ ਜਾਂ $9m+8$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

1.3 ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (Fundamental Theorem of Arithmetic)

ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$ ਆਦਿ। ਆਉ ਹੁਣ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਭਾਵ ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ? ਆਉ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ।

ਕੁਝ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਮੰਨ ਲਉ 2, 3, 7, 11 ਅਤੇ 23 ਦਾ ਇੱਕ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਲਉ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਜਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਾ ਕਰੀਏ (ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿੰਨੀ ਵਾਰ ਚਾਹੀਏ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ) ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਵੱਡਾ ਸਾਰਾ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਬਣਾ ਸਕਦੇ

ਹਾਂ (ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਮਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ)। ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾਈਏ :

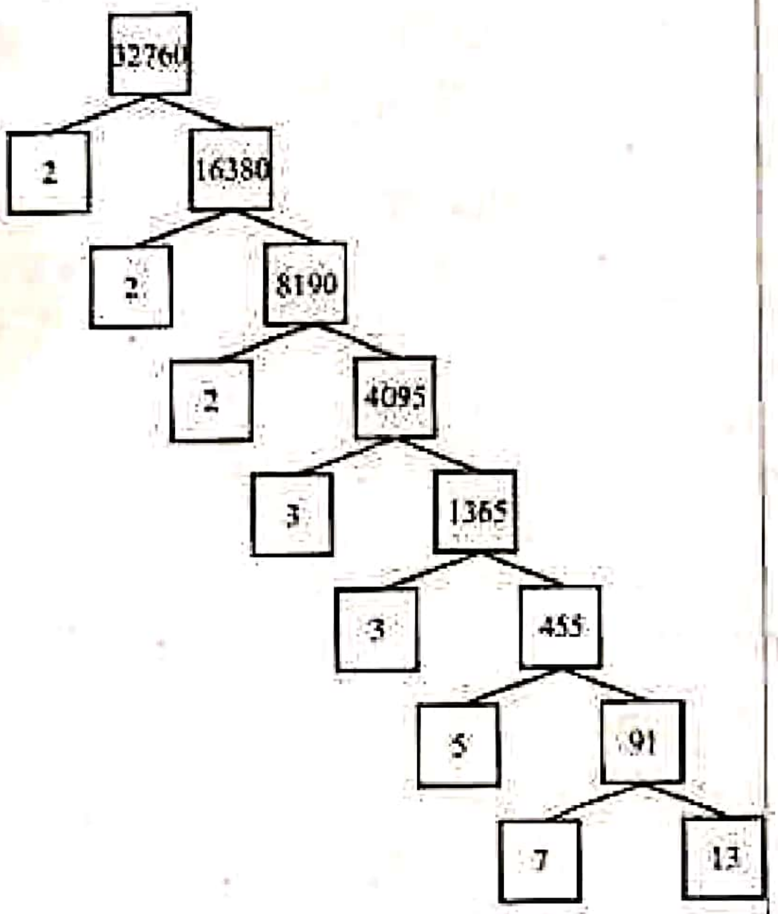
$7 \times 11 \times 23 = 1771$, $\quad 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$,

$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$, $\quad 2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$,

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$ ਆਦਿ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਤੁਹਾਡੇ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਵਿੱਚ, ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਵ ਅਭਾਜ (prime) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਇਸ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਦੇ ਮਾਪ (size) ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਕੀ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ (finites) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜਾਂ ਅਸੀਮਿਤ (Infinite)? ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਣਗਿਣਤ (Infinites) ਹਨ। ਸੋ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਇਕੱਠਾ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਅਣਗਿਣਤ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦਾ ਅਣਗਿਣਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਹੁਣ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭਾਜ (composite) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸੋਚਦੇ ਹੋ? ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕੋਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜੋ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ (powers) ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾ ਹੋਵੇ ? ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਆਉ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਕਰੀਏ, ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਤੱਕ ਜੋ ਕੀਤਾ ਹੈ ਉਸਦਾ ਉਲਟਾ ਕਰੀਏ।

ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰੁੱਖ (factor tree) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣੂੰ ਹੋ। ਆਉ ਇੱਕ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨ ਲਉ 32760 ਲਈਏ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੇਠਾਂ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਕਰੀਏ :



ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ 32760 ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕਰ ਲਿਆ ਹੈ ਜੋ $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ ਹੈ। ਭਾਵ $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ ਹੈ, ਜੋ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਆਉ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨ ਲਉ 123456789 ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਲਿਖੀਏ। ਇਸ ਨੂੰ $3^2 \times 3803 \times 3607$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਬੇਸ਼ਕ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ਕਿ 3803 ਅਤੇ 3607 ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ (ਕੁਝ ਹੋਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੈ ਕੇ ਤੁਸੀਂ ਆਪ ਵੀ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ) ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਅਨੁਮਾਨ (conjecture) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮੂਲਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸਥਾਨ ਰੱਖਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਾਰਣ ਇਹ ਕਥਨ **ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (Fundamental Theorem of Arithmetic)** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਆਉ ਇਸ ਪਰਿਮੇਯ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਿਕ (formal) ਤੌਰ 'ਤੇ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੀਏ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.12 (ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ) ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ (composite number) ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (prime numbers) ਦੇ ਇੱਕ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ (ਦਰਸਾਇਆ) ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਤਰਤੀਬ (ਕ੍ਰਮ) (order) ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲ ਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.2 ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵਰਨਣ ਯੂਕਲਿਡ ਦੇ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਦੀ ਪੁਸਤਕ IX ਵਿੱਚ ਸਾਧਯ (proposition) 14 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਸਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਬੂਤ ਕਾਰਲ ਫ੍ਰੈਡਰਿਕ ਗਾੱਸ *(Carl Friedrich Guass)* ਦੀ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ ਡਿਸਕਿਊਸ਼ਸ ਅਰਥਮੇਟਿਕੀ *(Disquisitions Arithmeticae)* ਵਿੱਚ ਸੀ।

ਕਾਰਲ ਫ੍ਰੈਡਰਿਕ ਗਾੱਸ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ 'ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਦੇ ਰਾਜ ਕੁਮਾਰ' ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਨਾਮ ਹਰ ਸਮੇਂ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਰਹੇ ਤਿੰਨ ਮਹਾਨਤਮ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਆਰਕੀਮੀਡਿਜ਼ (Archimedes) ਅਤੇ ਨਿਊਟਨ (Newton) ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਵਿਗਿਆਨ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਹੀ ਮੌਲਿਕ ਯੋਗਦਾਨ ਹੈ।

ਕਾਰਲ ਫ੍ਰੈਡਰਿਕ ਗਾੱਸ
(1777 – 1855)

ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਹੋਰ ਵੀ ਕੁਝ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਖਿਨਾਂ ਇਹ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਿਆਂ ਕਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕਿਸ ਤਰਤੀਬ (ਕ੍ਰਮ)

(order) ਵਿੱਚ ਹਨ, ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਤਰੀਕੇ (unique way) ਨਾਲ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਦਾ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਹੀ ਤਰੀਕਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ 'ਤੇ ਕੋਈ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ। ਇਸ ਲਈ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ਨੂੰ ਉਹ ਹੀ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਜੋ $3 \times 5 \times 7 \times 2$, ਨੂੰ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇਹਨਾਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਵੀ ਅਸੀਂ $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ਵਰਗਾ ਹੀ ਮੰਨਾਂਗੇ। ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ, ਉਸਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬ (ਕ੍ਰਮ) ਨੂੰ ਛੱਡਦੇ ਹੋਏ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ x ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸਨੂੰ $x = p_1 p_2 \ldots p_n$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ਆਦਿ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਭਾਵ $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n$ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀਆਂ (ਬਰਾਬਰ) ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰ ਲਈਏ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ (powers) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, $32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$

ਇੱਕ ਵਾਰ ਇਹ ਨਿਰਣਾ ਲੈਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਕਿ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਇਹ ਤਰਤੀਬ ਵਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗੀ ਤਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੋਣਗੇ।

ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਹੋਰ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਹੀ ਅਨੇਕਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ। ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ 4^n 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ n ਦਾ ਕੋਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ 4^n ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ (0) 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ n ਦੇ ਲਈ ਸੰਖਿਆ 4^n ਸਿਫ਼ਰ 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ ਤਾਂ ਇਹ 5 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇਗੀ। ਭਾਵ 4^n ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿੱਚ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ 5 ਆਉਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $4^n = (2)^{2n}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 4^n ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ 2 ਹੀ ਆ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਿਲੱਖਣਤਾ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਯਕੀਨ ਦਿਵਾਉਂਦੀ ਹੈ ਕਿ 4^n ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿੱਚ 2 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਕੋਈ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ n ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਲਈ 4^n ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ 0 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ (L.C.M) ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ, ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਨਾਮ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ

ਗਿਆ ਸੀ। ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਨੂੰ *ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਵਿਧੀ (prime factorisation method)* ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਆਉ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ 6 ਅਤੇ 20 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ (L.C.M) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $6 = 2^1 \times 3^1$ ਅਤੇ $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ ਹੈ।

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਤੁਸੀਂ ਮ.ਸ.ਵ. (H.C.F) (6, 20) = 2 ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ. (L.C.M.) (6, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ HCF (6, 20) = 2^1 = **ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਸਾਂਝੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਘਾਤ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ** ਅਤੇ

LCM (6, 20) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ = **ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਆਏ ਹਰ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ**

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚੋਂ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖ ਲਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ HCF (6, 20) × LCM (6, 20) = 6×20 ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ **HCF (a, b) × LCM $(a, b) = a \times b$** ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਿੱਟੇ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ *LCM* ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਪਤਾ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ 96 ਅਤੇ 404 ਦਾ HCF ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਸ ਦਾ LCM ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: 96 ਅਤੇ 404 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$96 = 2^5 \times 3, \quad 404 = 2^2 \times 101$$

ਇਸ ਲਈ, ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ ਭਾਵ HCF (96,404) = $2^2 = 4$

ਨਾਲ ਹੀ
$$\text{LCM}(96, 404) = \frac{96 \times 404}{\text{HCF}(96, 404)} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ 6, 72 ਅਤੇ 120 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ (L.C.M) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ :

$$6 = 2 \times 3, \quad 72 = 2^3 \times 3^2 \quad \text{ਅਤੇ} \quad 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

2^1 ਅਤੇ 3^1 ਹਰ ਇੱਕ ਸਾਂਝੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀਆਂ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, HCF (6, 72, 120) = $2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

2^3, 3^2 ਅਤੇ 5^1 ਹਰ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਘਾਤ ਹੈ, ਜੋ ਤਿੰਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, LCM $(6, 72, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $6 \times 72 \times 120 \neq$ HCF $(6, 72, 120) \times$ LCM $(6, 72, 120)$, ਭਾਵ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਉਹਨਾਂ ਦੇ HCF ਅਤੇ LCM ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ:

   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ HCF ਅਤੇ LCM ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ = HCF $\times$ LCM ਹੈ।

   (i) 26 ਅਤੇ 91 (ii) 510 ਅਤੇ 92 (iii) 336 ਅਤੇ 54

3. ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ HCF ਅਤੇ LCM ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) 12, 15 ਅਤੇ 21 (ii) 17, 23 ਅਤੇ 29 (iii) 8, 9 ਅਤੇ 25

4. HCF $(306, 657) = 9$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। LCM $(306, 657)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਲਈ ਸੰਖਿਆ 6^n ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ (0) 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

6. ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ ਕਿ $7 \times 11 \times 13 + 13$ ਅਤੇ $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕਿਉਂ ਹਨ।

7. ਕਿਸੇ ਖੇਡ ਦੇ ਮੈਦਾਨ ਦੇ ਚਾਰੇ-ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਰਸਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਮੈਦਾਨ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਸਿੰਪੀ ਨੂੰ 18 ਮਿੰਟ ਲਗਦੇ ਹਨ, ਜਦ ਕਿ ਇਸ ਮੈਦਾਨ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਰਵੀ ਨੂੰ 12 ਮਿੰਟ ਲੱਗਦੇ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਹ ਦੋਨੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਥਾਨ ਅਤੇ ਇੱਕੋ ਹੀ ਸਮੇਂ 'ਤੇ ਚਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਬਾਅਦ ਉਹ ਦੋਵੇਂ ਸ਼ੁਰੂ ਵਾਲੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਮਿਲਣਗੇ।

1.4 ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਗੁਣਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਕਰਵਾਇਆ ਗਿਆ ਸੀ। ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ ਅਤੇ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਅਤੇ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮਿਲਕੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (real numbers) ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੀ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਥਾਨ ਨਿਰਧਾਰਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਫਿਰ ਵੀ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਸੀ ਕੀਤਾ ਕੀ ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹਨ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ਅਤੇ ਆਮ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $\sqrt{p}$

ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ p ਇਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਆਪਣੇ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ, ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ।

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਸੰਖਿਆ 's' ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਉਸ ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ। ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣੂੰ ਹੋ, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\ldots, \text{ ਆਦਿ ।}$$

ਇਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ $\sqrt{2}$ ਨੂੰ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਸਿੱਧ ਕਰੀਏ, ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪਵੇਗੀ, ਇਸਦਾ ਸਬੂਤ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪਰਿਮੇਯ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 : ਮੰਨ ਲਉ p ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ p, a^2 ਨੂੰ ਭਾਗ (ਵੰਡਦੀ) ਕਰਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ p, a ਨੂੰ ਵੀ ਭਾਗ ਕਰੇਗੀ। ਇੱਥੇ a ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

***ਸਬੂਤ :** ਮੰਨ ਲਉ a ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਦੇ ਹਨ: $a = p_1 p_2 \ldots p_n$ ਜਿੱਥੇ $p_1, p_2, \ldots p_n$ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਇਹ ਅੱਲਗ-ਅੱਲਗ ਹੋਣ।
ਇਸ ਲਈ $a^2 = (p_1 p_2 \ldots p_n)(p_1 p_2 \ldots p_n) = p_1^2 p_2^2 \ldots p_n^2$

ਹੁਣ, ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ p, a^2 ਨੂੰ ਭਾਗ (ਵੰਡਦੀ) ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ p, a^2 ਦਾ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਿਲੱਖਣਤਾ ਦੇ ਗੁਣ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ a^2 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਕੇਵਲ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ p ਨੂੰ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੋਣਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਹੁਣ, ਕਿਉਂਕਿ $a = p_1 p_2 \ldots p_n$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ p, a ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰ ਭਾਗ ਕਰੇਗਾ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਸਬੂਤ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਸਬੂਤ ਉਸ ਤਕਨੀਕ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ 'ਸਵੈਵਿਰੋਧ ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ' (proof by contradiction) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। (ਇਸ ਤਕਨੀਕ ਦੀ ਵਿਸਥਾਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਅੰਤਿਕਾ – 1 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ)।

ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 1.4 : $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ : ਅਸੀਂ ਦੋ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ r ਅਤੇ s ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

* ਇਹ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

$\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ $s\ (\neq 0)$ ਹੋਵੇ। ਮੰਨ ਲਓ r ਅਤੇ s ਵਿੱਚ, 1 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨੂੰ r ਅਤੇ s ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ a ਅਤੇ b ਸਹਿ ਅਭਾਜ (co-prime) ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ : $b\sqrt{2} = a$ ਹੋਇਆ।

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਵਰਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$2b^2 = a^2$$

ਇਸ ਲਈ : 2, a^2 ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ (ਭਾਗ ਕਰਦਾ) ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 ਦੁਆਰਾ 2, a ਨੂੰ ਵੀ ਵੰਡੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $a = 2c$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ c ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

a ਦਾ ਮੁੱਲ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $2b^2 = 4c^2$,ਭਾਵ $b^2 = 2c^2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ 2, b^2 ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ 2, b ਨੂੰ ਵੀ ਵੰਡੇਗਾ (ਪ੍ਰਮੇਯ ੧.੩ ਵਿੱਚ $p = 2$ ਲੈਣ 'ਤੇ)।

ਇਸ ਲਈ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ 2 ਹੈ।

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ 1 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਹ ਉਲਟ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤਰੁੱਟੀ ਵਾਲੀ ਗੱਲ ਮੰਨੀ ਸੀ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ $b\ (\neq 0)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ, 1 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇ ਕੇ a ਅਤੇ b ਨੂੰ ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ $b\sqrt{3} = a$ ਹੈ।

ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਵਰਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $3b^2 = a^2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ a^2, 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 ਦੁਆਰਾ 3, a ਨੂੰ ਵੀ ਭਾਗ ਕਰੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $a = 3c$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ c ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

a ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ $3b^2 = a^2$ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ

$$3b^2 = 9c^2 \text{ ਭਾਵ } b^2 = 3c^2 \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ b^2, 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 ਦੁਆਰਾ b ਵੀ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਸਾਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ 3 ਹੈ।

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ a ਅਤੇ b ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਉਲਟ ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤਰੁੱਟੀ ਵਾਲੀ ਗੱਲ ਮੰਨੀ ਸੀ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੱਸਿਆ ਸੀ ਕਿ:

- ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਘਟਾਉ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ
- ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜਾਂ ਭਾਗਫਲ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ, ਉਪਰੋਕਤ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $5-\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $5-\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਦੋ ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b $(b \neq 0)$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $5-\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਲਈ $\quad 5-\frac{a}{b}=\sqrt{3}$ ਹੈ।

ਜਾਂ $\quad \sqrt{3}=5-\frac{a}{b}$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ a ਅਤੇ b ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $5-\frac{a}{b}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਭਾਵ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਉਲਟ ਸਾਨੂੰ ਸਾਡੇ ਗਲਤ ਮੰਨਣ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $5-\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $5-\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $3\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਆਉ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $3\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b $(b \neq 0)$ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$ ਹੋਵੇ।

ਕਿਉਂਕਿ 3, a ਅਤੇ b ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $\frac{a}{3b}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਲਈ $\sqrt{2}$ ਵੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $3\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.3

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\sqrt{5}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $3 + 2\sqrt{5}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
3. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹਨ :

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

1.5 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਰੂਪ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸ਼ਾਂਤ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ (terminating decimal expansions) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਫਿਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (non-terminating repeating) ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨ ਲਉ $\frac{p}{q} (q \neq 0)$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖੋਜ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ $\frac{p}{q}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ (ਰੂਪ) ਕਦੋਂ ਸ਼ਾਂਤ ਅਤੇ ਕਦੋਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਆਉ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ

(i) 0.375 (ii) 0.104 (iii) 0.0875 (iv) 23.3408

ਹੁਣ (i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਈ ਉਮੀਦ ਕਰੇਗਾ, ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ (ਲਿਖਿਆ) ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਹਰ 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਆਉ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟ ਕੇ, ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{10^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{13}{5^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4}$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਥੇ ਕੋਈ ਨਮੂਨਾ (Pattern) ਦੇਖ ਰਹੇ ਹੋ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਸ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਇੱਕ ਸ਼ਾਂਤ ਦਸ਼ਮਲਵ ਹੈ, ਇੱਕ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਲਿਆ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ ਅਤੇ ਹਰ (ਭਾਵ q) ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ 2 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਜਾਂ 5 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਜਾਂ ਦੋਹਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ ਹਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੀ ਦਿਸਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ 10 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ 2 ਅਤੇ 5 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਹੀ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਭਾਵੇਂ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਘੱਟ ਹੀ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹੱਲ ਕਰਕੇ ਦੇਖੀਆਂ ਹਨ, ਫਿਰ ਵੀ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੈ, ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਹਰ 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ 10 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕੇਵਲ 2 ਅਤੇ 5 ਹੀ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟਕੇ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ n ਅਤੇ m ਕੋਈ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਣ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਆਉ ਆਪਣੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲਿਖੀਏ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.5 ਮੰਨ ਲਉ x ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ (ਰੂਪ) ਸ਼ਾਂਤ ਹੈ। ਹੁਣ x ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ ਅਤੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜਿੱਥੇ n, m ਕੋਈ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਹੈਰਾਨ ਹੋ ਰਹੇ ਹੋਵੋਗੇ ਕਿ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.5 ਦਾ ਉਲਟ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ? ਭਾਵ

ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਕੋਈ ਪ੍ਰਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਅਤੇ m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਕੀ $\frac{p}{q}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੋਵੇਗਾ?

ਆਉ ਹੁਣ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕੀ ਉਪਰੋਕਤ ਕਥਨ ਦੇ ਸੱਚ ਹੋਣ ਦੇ ਕੋਈ ਸਪਸ਼ਟ ਕਾਰਣ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ ਇਸ ਗੱਲ ਨਾਲ ਸਹਿਮਤ ਹੋਵੋਗੇ ਕਿ $\frac{a}{b}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ, ਜਿੱਥੇ b, 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੈ, ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਅਰਥਪੂਰਣ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ, ਜਿੱਥੇ q, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਨੂੰ $\frac{a}{b}$ ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤੁਲ (equivalent) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਵੇ, ਜਿੱਥੇ b, 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੋਵੇ। ਆਉ ਆਪਣੇ ਉੱਪਰ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਾਪਸ ਆਈਏ ਅਤੇ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ।

(i) $\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3}=\frac{3\times5^3}{2^3\times5^3}=\frac{375}{10^3}=0.375$

(ii) $\frac{13}{125}=\frac{13}{5^3}=\frac{13\times2^3}{5^3\times2^3}=\frac{104}{10^3}=0.104$

(iii) $\frac{7}{80}=\frac{7}{2^4\times5}=\frac{7\times5^3}{2^4\times5^4}=\frac{875}{10^4}=0.0875$

(iv) $\frac{14588}{625}=\frac{2^2\times7\times521}{5^4}=\frac{2^6\times7\times521}{2^4\times5^4}=\frac{233408}{10^4}=23.3408$

ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਜਿੱਥੇ q, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਨੂੰ $\frac{a}{b}$ ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤੁੱਲ (equivalent) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ b, 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਸ਼ਾਂਤ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਆਉ ਇਸ ਪਰਿਣਾਮ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲਿਖੀਏ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.6 : ਮੰਨ ਲਉ $x=\frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੈ ਕਿ q, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਅਤੇ m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੱਲ ਵੱਧਣ ਲੱਗੇ ਹਾਂ ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (non terminating) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਾਰ ਫਿਰ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈ ਕੇ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਪਾਠ 1 ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ 5 ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\frac{1}{7}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.1428571 \\
7 & 10 \\
 & \underline{7} \\
 & 30 \\
 & \underline{28} \\
 & 20 \\
 & \underline{14} \\
 & 60 \\
 & \underline{56} \\
 & 40 \\
 & \underline{35} \\
 & 50 \\
 & \underline{49} \\
 & 10 \\
 & \underline{7} \\
 & 30
\end{array}
$$

ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, . . . ਹਨ ਅਤੇ ਭਾਜਕ 7 ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿਚ ਹਰ 7, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.5 ਅਤੇ 1.6 ਤੋਂ, $\frac{1}{7}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਇੱਥੇ 0 ਬਾਕੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਆਵੇਗਾ (ਕਿਉਂ?) ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਬਾਕੀ ਬਚਣ ਵਾਲੇ ਅੰਕ ਫਿਰ ਤੋਂ ਆਉਣੇ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਜਾਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ $\frac{1}{7}$ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਬਲਾਕ ਭਾਵ 142857 ਫਿਰ ਤੋਂ ਆਵੇਗਾ।

ਅਸੀਂ $\frac{1}{7}$ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿੱਚ ਜੋ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਉਹ ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ ਜੋ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ 1.5 ਅਤੇ 1.6 ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.7 ਮੰਨ ਲਉ $x = \frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੈ ਕਿ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਅਤੇ m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸ਼ਾਂਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਾਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.4

1. ਬਿਨਾਂ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਰਦਿਆਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹਨ ਜਾਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹਨ :

   (i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{17}{8}$ (iii) $\frac{64}{455}$

(iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{29}{343}$ (vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$

(vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{6}{15}$ (ix) $\frac{35}{50}$ (x) $\frac{77}{210}$

2. ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਲਿਖੋ ਜੋ ਸ਼ਾਂਤ ਹਨ।

3. ਕੁਝ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਲਈ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੈ ਤਾਂ q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ?

(i) 43.123456789 (ii) 0.120120012000120000... (iii) $43.\overline{123456789}$

1.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

1. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ :

   ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਲਈ ਅਸੀਂ $a = bq + r, 0 \le r < b$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੀਆਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

2. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ : ਇਹ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ $b, (a > b)$ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

   ਪਗ 1 : q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਯੂਕਲਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $a = bq + r, 0 \le r < b$ ਹੈ।

   ਪਗ 2 : ਜੇਕਰ $r = 0$ ਹੈ ਤਾਂ HCF $= b$ ਹੈ। ਜੇਕਰ $r \ne 0$ ਹੈ ਤਾਂ b ਅਤੇ r ਉੱਪਰ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।

   ਪਗ 3 : ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਜਾਰੀ ਰੱਖੋ ਜਦ ਤੱਕ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਾ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਾਲਾ ਭਾਜਕ ਹੀ HCF (a, b) ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ HCF (a, b) = HCF (b, r)

3. ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ :

   ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ

(ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ) ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਉੱਪਰ ਕੋਈ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤੇ ਬਿਨਾਂ ਕਿ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਿਸ ਤਰਤੀਬ ਵਿੱਚ ਆ ਰਹੇ ਹਨ।

4. ਜੇਕਰ p ਕੋਈ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ p, a^2 ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ (ਭਾਗ) ਹੈ ਤਾਂ p, a ਨੂੰ ਵੀ ਵੰਡੇਗਾ। ਇੱਥੇ a ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

5. ਸਬੂਤ ਕਿ $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ਆਦਿ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

6. ਮੰਨ ਲਉ x ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ x ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ ਅਤੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ n, m ਗੈਰ-ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

7. ਮੰਨ ਲਉ $x = \frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ n, m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੋਵੇਗਾ।

8. ਮੰਨ ਲਉ $x = \frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n, m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੋਵੇਗਾ।

ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ:

HCF $(p, q, r) \times$ LCM $(p, q, r) \neq p \times q \times r$, ਜਿੱਥੇ p, q, r ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ (ਉਦਾਹਰਣ 8 ਦੇਖੋ)। ਜਦੋਂ ਕਿ ਤਿੰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ p, q ਅਤੇ r ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿਤੇ ਪਰਿਣਾਮ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ:

$$\text{LCM}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{HCF}(p, q, r)}{\text{HCF}(p, q) \cdot \text{HCF}(q, r) \cdot \text{HCF}(p, r)}$$

$$\text{HCF}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{LCM}(p, q, r)}{\text{LCM}(p, q) \cdot \text{LCM}(q, r) \cdot \text{LCM}(p, r)}$$