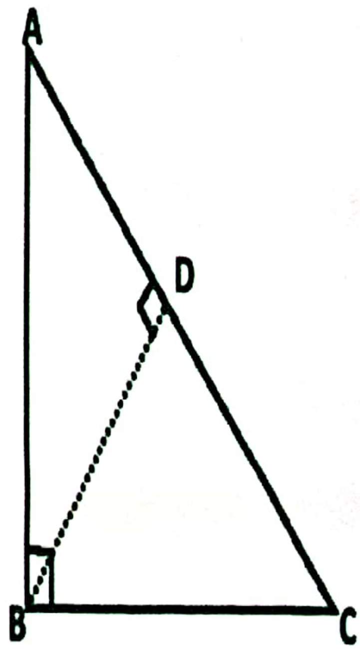
ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ: ਕਿਸੇ ਸਮਕੋਣੀ ਤਿਕੋਣ ਵਿੱਚ ਵਿੱਚ ਕਰਣ ਦਾ ਵਰਗ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਦਿੱਤਾ ਹੈ: ΔABC ਵਿੱਚ $\angle B = 90^\circ$

ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ: $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

ਰਚਨਾ: ਬਿੰਦੂ B ਤੋਂ $BD \perp AC$ ਖਿੱਚੋ।



ਸਬੂਤ: ΔABC ਅਤੇ ΔADB ਵਿੱਚ

$\angle A = \angle A$ (ਸਾਂਝਾ ਕੋਣ)

$\angle ABC = \angle ADB$ (ਹਰੇਕ 90°)

$\Delta ABC \sim \Delta ADB$ (ਨਿਯਮ AA ਅਨੁਸਾਰ)

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$$

$(AB)^2 = AC \times AD$ ---------------(1)

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ΔABC ਅਤੇ ΔBDC ਵਿੱਚ

$(BC)^2 = AC \times DC$ ---------------(2)

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC \times AD) + (AC \times DC)$

$(AB)^2 + (BC)^2 = AC \times (AD + DC)$

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC \times AC)$ (ਕਿਉਂ ਕਿ $AC = AD + DC$)

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$

ਸ. ਗੁਰਬਖਸ਼ ਸਿੰਘ (ਮੈਥ ਮਾਸਟਰ)

ਸਮਰੂਪਤਾ ਥਿਊਰਮ ਜਾਂ ਖੇਤਰਫਲ ਥਿਊਰਮ

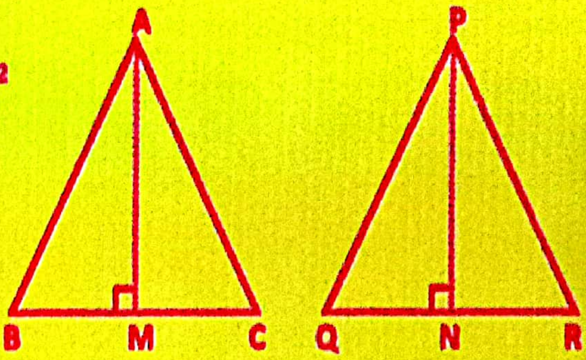
ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ: ਦੋ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਦਿੱਤਾ ਹੈ: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ਇਸ ਲਈ $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$ ----------- ①

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ ----------- ②

ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ: $\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2$



ਰਚਨਾ: ΔABC ਵਿੱਚ $AM \perp BC$ ਖਿਚੋ। ΔPQR ਵਿੱਚ $PN \perp QR$ ਖਿਚੋ।

ਸਬੂਤ: ਤਿਕੋਣ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} \times$ ਆਧਾਰ $\times$ ਲੰਬ

ਹੁਣ ΔABC ਅਤੇ ΔPQR ਵਿੱਚ

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN}$$

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \frac{BC \times AM}{QR \times PN}$$

$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \frac{AB \times AM}{PQ \times PN}$ (ਸਮੀਕਰਣ ② ਤੋਂ) ----------- ③

ਹੁਣ ΔAMB ਅਤੇ ΔPNQ ਵਿੱਚ

$\angle B = \angle Q$ (ਸਮੀਕਰਣ ① ਤੋਂ)

$\angle M = \angle N$ (ਹਰੇਕ $90°$)

ਇਸ ਲਈ $\Delta AMB \sim \Delta PNQ$ (ਨਿਯਮ AA ਅਨੁਸਾਰ)

ਇਸ ਲਈ $\frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ}$ ----------- ④

ਸਮੀਕਰਣ ③ ਅਤੇ ④ ਤੋਂ

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \frac{AB \times AB}{PQ \times PQ} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2$$

ਇਸ ਲਈ $\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2$

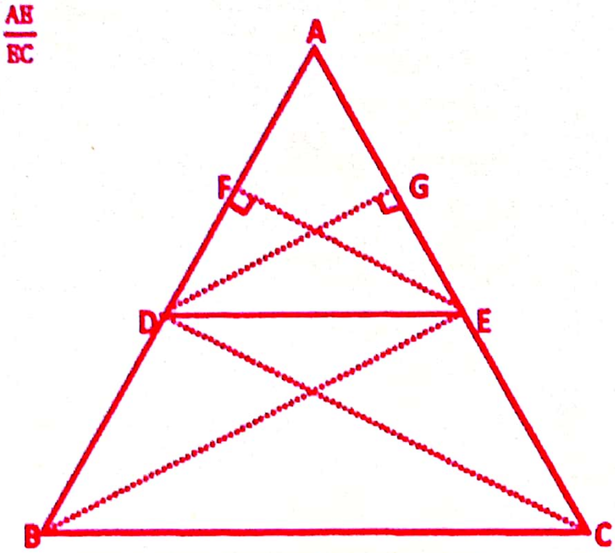
ਸ. ਗੁਰਬਖਸ਼ ਸਿੰਘ (ਮੈਥ ਮਾਸਟਰ)

ਥੇਲਜ ਜਾਂ ਮੂਲ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤਤਾ ਥਿਊਰਮ

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ: ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਕਿਸੇ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀ ਹੋਈ ਕੋਈ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੀਏ ਤਾਂ ਉਹ ਇਹਨਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ।

ਦਿੱਤਾ ਹੈ: ΔABC ਵਿੱਚ $DE \parallel BC$

ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$



ਰਚਨਾ: ਬਿੰਦੂ D ਤੋਂ $DG \perp AE$ ਖਿਚੋ। ਬਿੰਦੂ E ਤੋਂ $EF \perp AD$ ਖਿਚੋ।
ਬਿੰਦੂ D ਨੂੰ C ਨਾਲ ਅਤੇ B ਨੂੰ E ਨਾਲ ਮਿਲਾਓ।

ਸਬੂਤ: ਤਿਕੋਣ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} \times$ ਆਧਾਰ $\times$ ਲੰਬ

ਹੁਣ ΔADE ਅਤੇ ΔBDE ਵਿੱਚ

$$\frac{ar(\Delta ADE)}{ar(\Delta BDE)} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EF}{\frac{1}{2} \times BD \times EF}$$

$$\frac{ar(\Delta ADE)}{ar(\Delta BDE)} = \frac{AD}{BD} \quad \text{-----------} (1)$$

ਹੁਣ ΔADE ਅਤੇ ΔCDE ਵਿੱਚ

$$\frac{ar(\Delta ADE)}{ar(\Delta CDE)} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DG}{\frac{1}{2} \times CE \times DG}$$

$$\frac{ar(\Delta ADE)}{ar(\Delta CDE)} = \frac{AE}{CE} \quad \text{-----------} (2)$$

ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕੋ ਆਧਾਰ ਅਤੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਬਣੀਆਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $ar(\Delta BDE) = ar(\Delta CDE)$ -----------(3)

ਸਮੀਕਰਣ (1), (2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

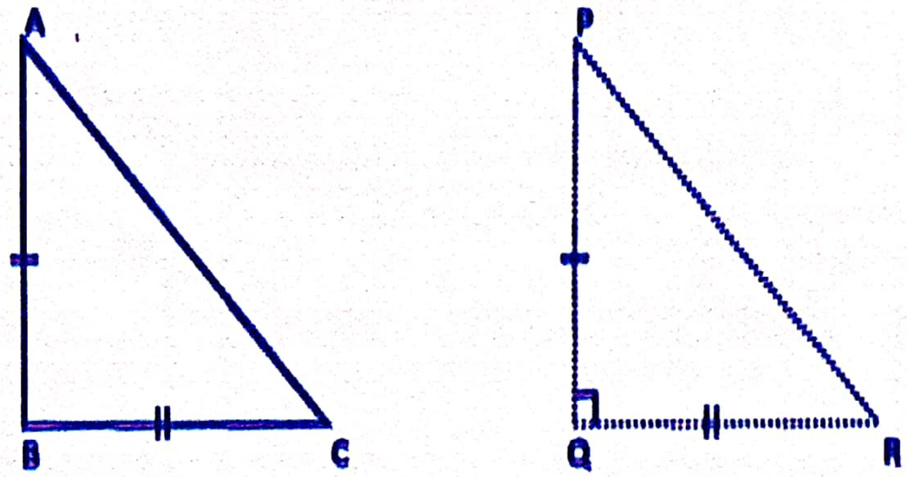
ਸ. ਗੁਰਬਖਸ਼ ਸਿੰਘ (ਮੈਥ ਮਾਸਟਰ)

ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦਾ ਉਲਟ

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ: ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦਾ ਵਰਗ, ਦੂਸਰੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਹਿਲੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਾਹਮਣੇ ਵਾਲਾ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਦਿੱਤਾ ਹੈ: ΔABC ਵਿੱਚ $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ: $\angle B = 90^\circ$



ਰਚਨਾ: ਇੱਕ ΔPQR ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\angle Q = 90^\circ$, $QR = BC$, $PQ = AB$

ਸਬੂਤ: ΔABC ਵਿੱਚ $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ) ....(1)

ΔPQR ਵਿੱਚ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਰਾਹੀਂ

$(PR)^2 = (PQ)^2 + (QR)^2$

$(PR)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ (ਰਚਨਾ ਤੋਂ) ....(2)

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ

$(AC)^2 = (PR)^2$

$AC = PR$ ....(3)

ਹੁਣ ΔABC ਅਤੇ ΔPQR ਵਿੱਚ

$AC = PR$ (ਸਮੀਕਰਣ (3) ਤੋਂ)

$AB = PQ$ (ਰਚਨਾ ਤੋਂ)

$BC = QR$ (ਰਚਨਾ ਤੋਂ)

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (ਨਿਯਮ SSS ਅਨੁਸਾਰ)

$\angle B = \angle Q$ (C.P.C.T ਰਾਹੀਂ)

$\angle B = 90^\circ$ (ਕਿਉਂਕਿ $\angle Q = 90^\circ$)

ਸ. ਗੁਰਬਖਸ਼ ਸਿੰਘ (ਮੈਥ ਮਾਸਟਰ)

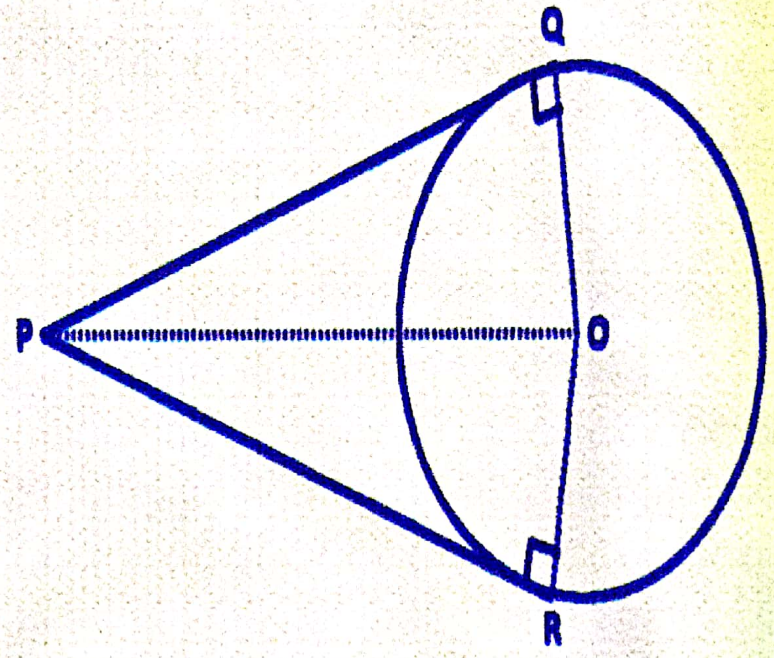
ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਥਿਊਰਮ

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ: ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰੀ ਤੋਂ ਚੱਕਰ ਉੱਤੇ ਖਿੱਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਦਿੱਤਾ ਹੈ: ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ O ਹੈ। P ਚੱਕਰ ਦਾ ਬਾਹਰੀ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। PQ ਅਤੇ PR ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ।

ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ: PQ = PR

ਰਚਨਾ: O ਨੂੰ P ਨਾਲ ਮਿਲਾਓ।
O ਨੂੰ Q ਨਾਲ ਮਿਲਾਓ।
O ਨੂੰ R ਨਾਲ ਮਿਲਾਓ।



ਸਬੂਤ: ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਅਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਵਿਚਕਾਰ ਬਣਿਆ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ (90°) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\angle OQP = \angle ORP = 90^\circ$ .... (1)

ਹੁਣ ΔOQP ਅਤੇ ΔORP ਵਿੱਚ

$OQ = OR$ (ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ)

$OP = OP$ (ਸਾਂਝੀ ਭੁਜਾ)

$\angle OQP = \angle ORP = 90^\circ$ (ਸਮੀਕਰਣ (1) ਤੋਂ)

ਇਸ ਲਈ $\Delta OQP \cong \Delta ORP$ (ਨਿਯਮ RHS ਅਨੁਸਾਰ)

ਇਸ ਲਈ $PQ = PR$ (CPCT ਰਾਹੀਂ)

ਸ. ਗੁਰਬਖਸ਼ ਸਿੰਘ (ਮੈਥ ਮਾਸਟਰ)